Обчислювальна та прикладна математика
Вип. 82, 1997, стор. 1–6

Computational and Applied Mathematics
No. 82, 1997, pp. 1–6

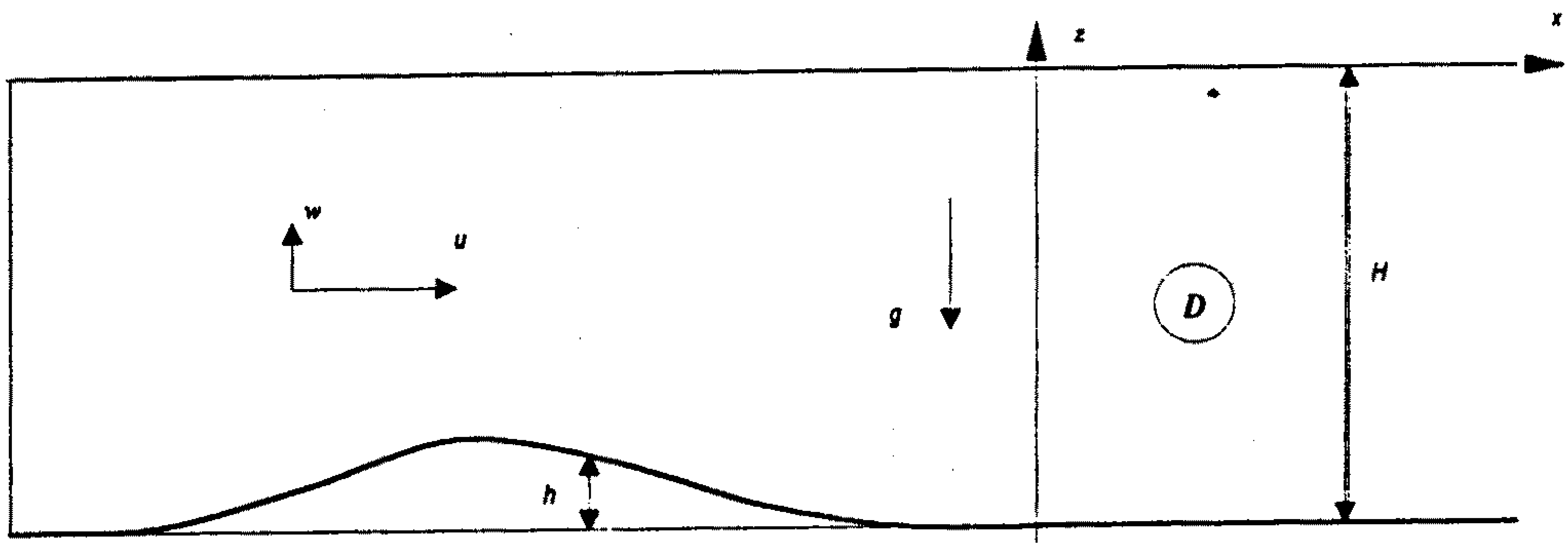
АСИМПТОТИЧНИЙ РОЗКЛАД РІШЕННЯ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ДЛЯ УСТАЛЕНОГО ПОТОКУ СТРАТИФІКОВАНОЇ РІДИНИ

УДК 517.958

А. М. АНТОНОВ ТА С. В. КРАВЧУК

РЕЗЮМЕ. Розглядається задача стаціонарного двовимірного руху нев'язкої нестисливої рідини у полі сил тяжіння. Для розрахунку поля течії використовується метод асимптотичного розкладу рішення по малому параметру. Розроблений алгоритм дозволяє отримувати картину функцій тока для точної (нелінійної) задачі збуреної течії стратифікованої рідини. Основними обмеженнями алгоритму є відсутність зон зворотної течії (роторів) та великий характерний горизонтальний розмір рішення порівняно з глибиною потока. Наведені результати розрахунків.

Постановка задачі. Розглянемо стаціонарну двовимірну задачу руху нев'язкої нестисливої стратифікованої рідини. Схема течії наведена на мал. 1.



Мал. 1. Схема течії

При вказаних припущеннях рух рідини описується рівняннями Ейлера; рівняння нерозривності і стану (яке для нестисливої стратифікованої рідини має вигляд $\frac{d\rho}{dt} = 0$) замикають систему:

$$uu_X + ww_Z = -(\rho)^{-1}P_X, \tag{1}$$

$$uw_X + ww_Z = -(\rho)^{-1}P_Z - g, \tag{2}$$

$$(\rho u)_X + (\rho w)_Z = 0, \tag{3}$$

$$u\rho_X + w\rho_Z = 0, \tag{4}$$

де u, w — компоненти вектора швидкості рідини у системі координат (X, Z), $\rho = \rho(X, Z)$ — щільність рідини, P — тиск, g — прискорення вільного падіння, індекс позначає часткову похідну по відповідній координаті.

Граничні умови розглянемо у припущенні "твердої кришки":

$$w = 0, \quad \text{при} \quad Z = 0. \tag{5}$$

Припустимо також, що функція $\rho(X, Z)$ неперервна разом із своїми першими похідними у полосі $h(X) - H \le Z \le 0$. Ці два припущення дозволяють відфільтрувати поверхневі хвилі (маються на увазі хвилі на поверхні рідини та на лініях розділу рідин різних щільностей). Відмова від цих припущень приводить до невиправданого ускладнення задачі [1, 2].

На нижній границі розглянемо звичайні умови непротікання:

$$w = -u\frac{dh}{dX} \quad \text{при} \quad Z = h(X) - H. \tag{6}$$

Набігаючий потік вважаімо незбуреним:

$$w \to 0, \quad u \to u_\infty(Z), \quad \rho \to \rho_\infty(Z), \quad \text{при} \quad X \to -\infty, \tag{7}$$

функції $u_{-}\infty(Z)$ та $\rho_\infty(Z)$ вважаємо відомими.

Введемо функцію тока $\Psi(X, Z)$: $\frac{\partial\Psi}{\partial X} = -w\left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\frac{\partial\Psi}{\partial Z} = u\left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}}$, де ρ_0 — константа. Нехай при будь-якому X існуі однозначна функція $Z(X, \Psi)$, зворотна до функції $\Psi(X, Z)$ (X розглядається як параметр). З фізичної точки зору це означає, що немає замкнутих областей течії (роторів). З урахуванням висказаних припущень щодо неперервності функції $\rho(X, Z)$ та її перших похідних маємо:

$$J(\rho, \frac{\Psi}{X}, Z) = 0 \tag{8}$$

де J — якобіан; тобто $\rho = \rho(\Psi)$. Це дає змогу виражати u_∞ та ρ_∞ як функції від Z або Ψ. За висловлених припущень двовимірний усталений рух важкої неоднородної рідини може бути описаний нелінійним еліптичним рівнянням відносно функції тока Ψ [3]:

$$\Delta\Psi + gZ\rho'(\Psi)\frac{1}{\rho_0} = \Phi(\Psi), \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}, \tag{9}$$

де X — горизонтальна координата, Z — вертикальна координата, з граничними умовами

$$\Psi = 0, \quad Z = 0, \quad \Psi = \Psi_H, \quad Z = -H, \tag{10}$$

функція $\Phi(\Psi)$ визначається з умов при $X \to -\infty$. Розглянемо випадок, коли у незбуреній течії потік імпульсу не залежить від глибини Z. Рівняння (10) приймає вигляд [3]:

$$\Delta\psi + K(\psi)(\psi - z) = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{11}$$

Тут введені безрозмірні змінні та функції

$$K(\psi) = -\frac{g\rho'(\psi)}{\rho_0 U_0}, \quad \Psi = \frac{\Psi}{U_0 H}, \quad x = \frac{X}{H}, \quad z = \frac{Z}{H},$$

$U_0 = u_\infty(\Psi)\left(\frac{\rho(\Psi)}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}}$ — відома константа за припущенням, $K(\Psi) > 0$ — відома функція.

Розглянемо поведінку функції $\psi(x, z)$ при $x \to +\infty$ (область D на мал. 1 — течія нижче перешкоди). Якщо збурення течії від перешкоди не затухають, то в області

D течія буде описуватись нетривіальним рішенням рівняння (11) з граничними умовами

$$\psi = 0, \quad z = 0, \quad \psi = -1, \quad z = -1 \tag{12}$$

Існування нетривіальних рішень залежить від значення та поведінки функції $K(\psi)$.

Розв'язок рівняння. Нехай L — характерний розмір рішення по осі x, $L \gg 1$, $\varepsilon = L^{-1}$, $\varepsilon \ll 1$. Після переходу до нових координат $\xi = \varepsilon x$, $\zeta = z$, рівняння (11) приймає вигляд

$$\varepsilon^2 \psi_{\xi\xi} + \psi_{\zeta\zeta} + K(\psi)(\psi - \zeta) = 0 \tag{13}$$

індекс позначає часткову похідну по відповідній координаті. Рішення шукається за допомогою техніки асимптотичного розкладу (аналогічно [4]) у вигляді ряду по малому параметру ε:

$$\psi = \zeta + \varepsilon^2 \phi_1 + \varepsilon^4 \phi_2 + \cdots \tag{14}$$

$$\phi_1 = 0, \quad \phi_2 = 0, \quad \ldots, \qquad \zeta = 0, -1. \tag{15}$$

Підстановка (14) у (13) приводить до системи рівнянь

$$\phi_{1\zeta\zeta} + K(\zeta)\phi_1 - \mu\phi_1 = 0, \tag{16}$$

$$\phi_{2\zeta\zeta} + K(\zeta)\phi_2 - \mu\phi_2 = -\phi_{1\xi\xi} - K'(\zeta)\phi_1^2 - 4\pi^2\phi_1, \tag{17}$$

$$\ldots$$

де $\mu = \lambda\varepsilon^2$ — власне число крайової задачі (16), (15) (ε вибирається таким чином, що $\lambda\Theta \sim 1$).

Рівняння (16) допускає розв'язок методом розділення змінних у вигляді

$$\phi_1 = \Theta(\xi)\Omega(\zeta), \tag{18}$$

$\Omega(\zeta)$ знаходиться як розв'язок задачі

$$\Omega''(\zeta) + K(\zeta)\Omega(\zeta) = \mu\Omega(\zeta), \qquad \Omega(0) = \Omega(-1) = 0, \tag{19}$$

μ — найменьше по модулю власне число, з додатковою умовою нормування $\Omega(\zeta)$:

$$\int_{-1}^{0} \Omega^2(\zeta)\, d\zeta = 1, \tag{20}$$

$\Theta(\xi)$ визначається з умови ортогональності $\Omega(\zeta)$ лівій частині рівняння (17)

$$\Theta''(\xi) + \gamma\Theta^2(\xi) + \lambda\Theta(\xi) = 0, \tag{21}$$

де позначено $\gamma = \int_{-1}^{0} K(\zeta)\Omega^3(\zeta)\, d\zeta$. Інтегруючи (21) один раз, отримаємо рівняння

$$(\Theta')^2 + \frac{2\gamma}{3}\Theta^3 + 4\pi^2\Theta^2 + C = 0, \tag{22}$$

де C — константа інтегрування (має визначатися з додаткових граничних умов на лівій границі області D). Розв'язок диференціального рівняння (22) можна виразити через еліптичні функції Якобі. Якщо корені кубічного рівняння

$$\sigma^3 + \frac{6\pi^2}{\gamma}\sigma^2 + \frac{3C}{2\gamma} = 0 \tag{23}$$

позначити як σ_1, σ_2, σ_3, $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, функція $\Theta(\xi)$ буде мати вигляд

$$\Theta(\xi) = \alpha cn^2(\beta(\xi - c), k) + \delta, \tag{24}$$

де $\alpha = \sigma_1 - \sigma_2$, $\beta^2 = \gamma(\sigma_1 - \sigma_3)/6$, $k^2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3}$, c — константа інтегрування, також має визначатися з додаткових граничних умов на лівій границі області D.

Друге наближення $\psi_2(\xi, \zeta)$ можна шукати у вигляді ряду по $\omega_n(\zeta)$

$$\psi_2 = \sum \theta_n(\xi) w_n(\zeta). \tag{25}$$

Якщо власні функції $\omega_n(\zeta)$ оператора $\frac{d^2}{d\zeta^2} + K(\zeta)$ ортонормовані, підстановка (25) у (17) дозволяє отримати алгебраїчне рівняння для визначення $\theta_n(\xi)$ для $n \neq N$, N — номер переважаючої моди, $\omega_N = \Omega$:

$$\theta_n(\xi) = -\left[\frac{\Theta^2(\xi)}{\mu_n - \mu}\right] \int_{-1}^{0} K'(\zeta)\Omega^2(\zeta)\omega_n(\zeta)\, d\zeta, \tag{26}$$

де μ_n — власні числа оператора $\frac{d^2}{d\zeta^2} + K(\zeta)$, $\omega_n \neq \Omega$, $\mu_n \neq \mu$.

Для визначення θ_N треба, аналогічно пошуку $\Theta(\xi)$, використовувати рівняння для наступного наближення.

Приклад розрахунків. У загальному випадку для визначення Ω, ω_n та μ, μ_n необхідно використовувати чисельні алгоритми. Однак для деяких окремих видів функції $K(\zeta)$, які мають фізичний сенс, розроблений алгоритм допускає аналітичний розв'язок, що виражається через спеціальні функції.

Профіль

$$K(\zeta) = K = \text{const} \tag{27}$$

відповідає незбуреному лінійному профилю щільності рідини. Рівняння (11) переходить у добре відоме рівняння Гельмгольца. Власні функції (з урахуванням нормуючого множника) та числа

$$\omega_n = \sqrt{2}\sin(n\pi\zeta), \qquad \mu_n = K - n^2\pi^2. \tag{28}$$

Нетривіальне періодичне рішення існує у випадку $K > \pi^2$ і має вигляд гармонічних хвиль; лінії тока — синусоїди.

Цей випадок всебічно вивчений цілою низкою авторів і може слугувати як приклад для порівняння рішень у меньш досліджених випадках.

У літературі (наприклад, [5]) зустрічаються також розв'язки гідродинамічних рівнянь руху стратифікованої рідини для випадків кусково-сталої функції $K(\zeta)$:

$$K(\zeta) = \begin{cases} 0, & \zeta_1 < \zeta < 0, \\ K = \text{const}, & \zeta_2 < \zeta < \zeta_1, \\ 0, & -1 < \zeta < \zeta_2, \end{cases} \tag{29}$$

(фактично цей випадок зводиться до рівняння Гельмгольца, але з рухливими границями).

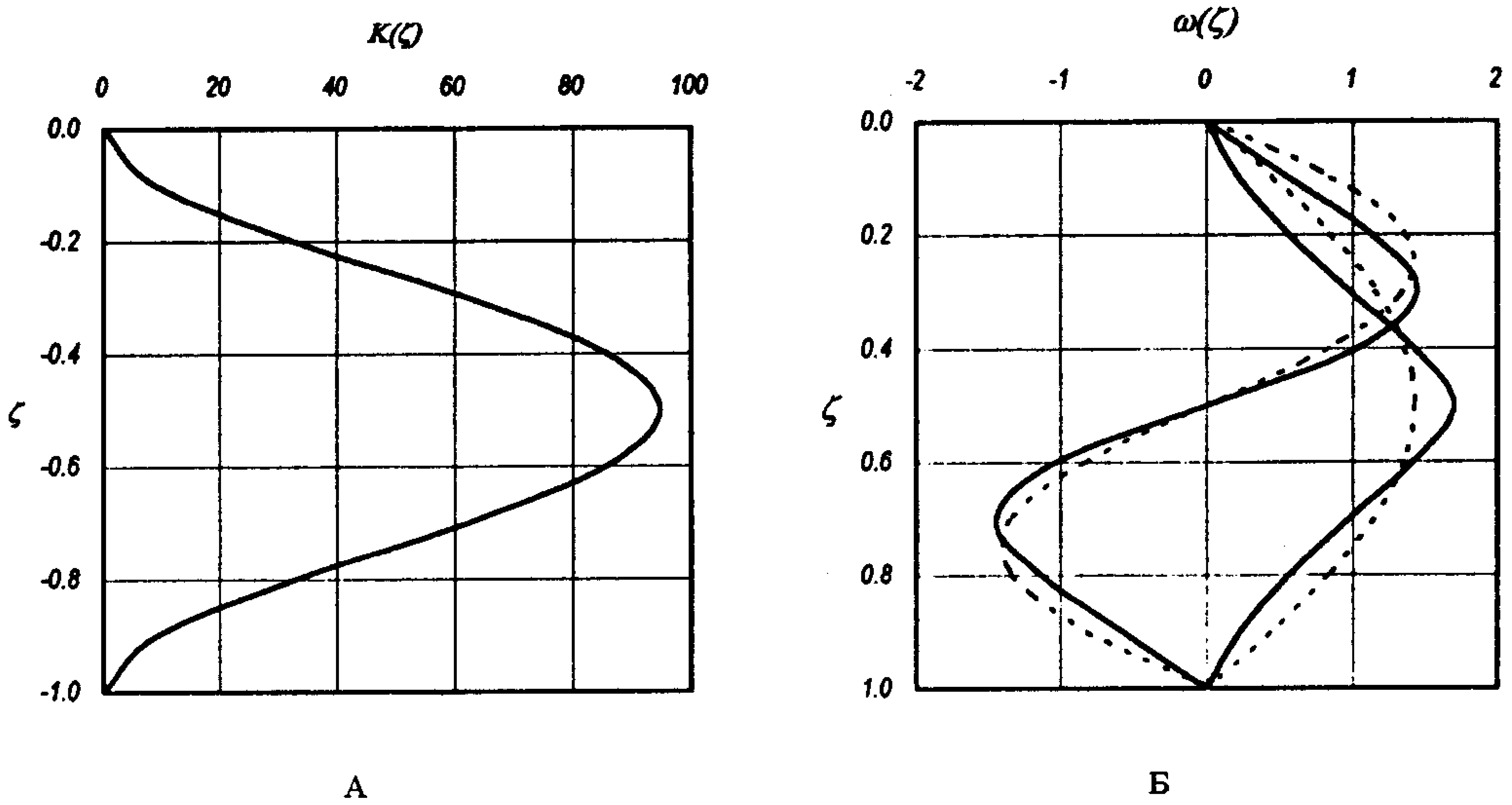
Для апробації запропонованого алгоритму була обрана функція

$$K(\zeta) = \pi^2(h - 2\theta\cos 2\pi\zeta), \tag{30}$$

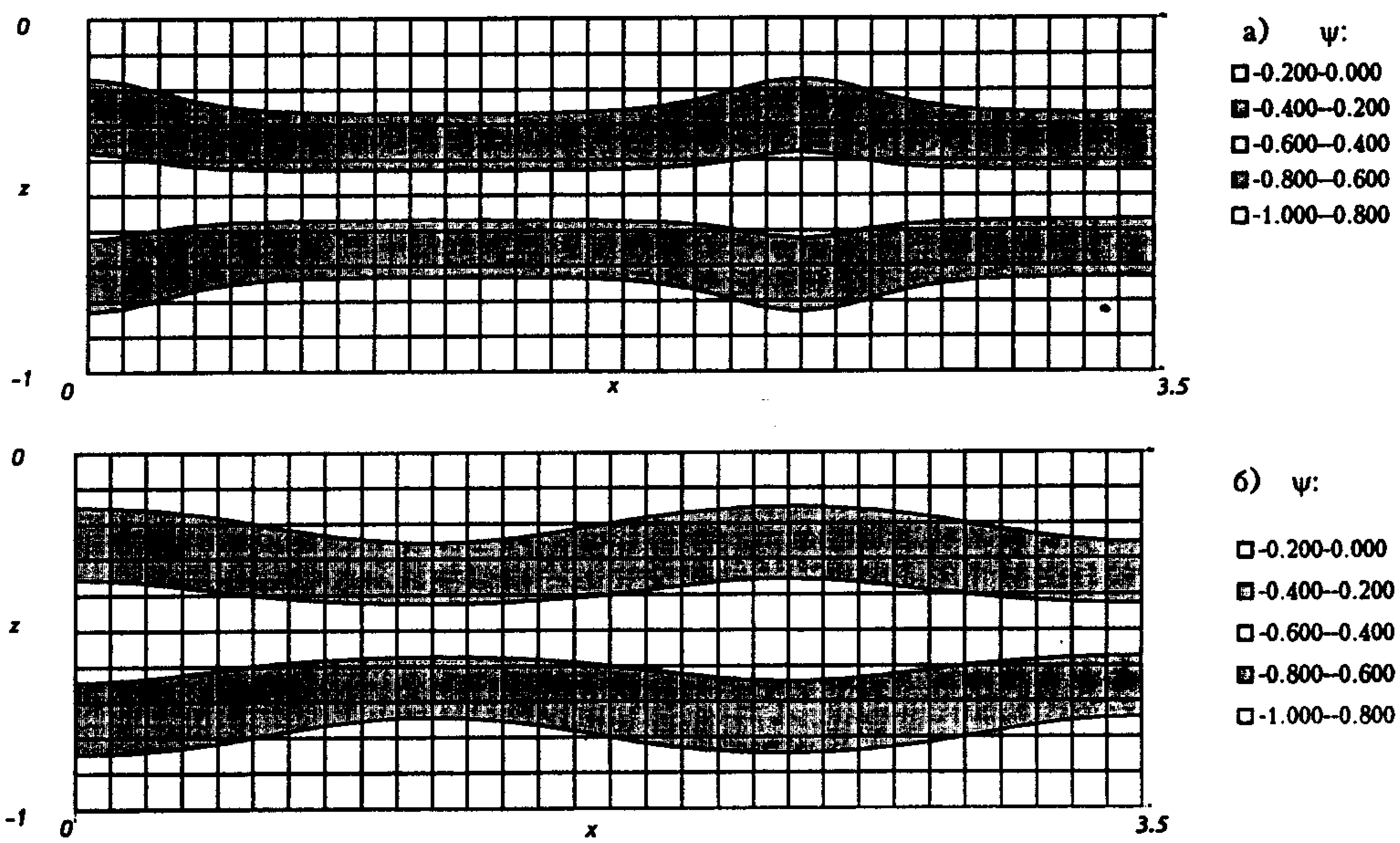
(практично однорідна рідина у поверхні та поблизу дна, різка зміна щільності у порівняно неширокому шарі рідини). Авторам невідоме існування отриманих іншими авторами аналітичних розв'язків для такого або схожого профілю неперервної функції $K(\zeta)$. Побудова рішення можлива за допомогою функцій Матьє [6]:

$$\omega_n = \sqrt{2}\,\mathrm{se}_n(\pi\zeta), \qquad \mu_n = \pi^2(h - b_n), \tag{31}$$

(позначення прийняті згідно з [6]). На мал. 2 наведено профіль функції $K(\zeta)$, використаної для розрахунків, а також наведені профілі функцій $\omega_1(\zeta)$ та $\omega_2(\zeta)$ (суцільні



Мал. 2. Профіль функції K (а) та власні функції ω (б) (пунктиром позначені власні функції у випадку $K = \mathrm{const}$)



Мал. 3. Лінії тока: а) $K = \pi^2(h - 2\theta\cos 2\pi\zeta)$; б) $K = \mathrm{const}$

лінії) у порівнянні з аналогічними функціями у випадку $K(\zeta) = \mathrm{const}$ (штрихові лінії).

Лінії тока для отриманого розв'язку показані на мал. 3-а.

Слід зазначити, що переважаючою є друга мода ($\Omega = \omega_2$). Для порівняння на мал. 3-б наведені лінії тока для випадку $K(\zeta) = \mathrm{const}$.

Обговорення результатів. Розроблений алгоритм дозволяє отримувати картину функцій тока для точної (нелінійної) задачі збуреної течії стратифікованої рідини. Основними обмеженнями алгоритму є 1) відсутність зон зворотної течії (роторів) та 2) великий характерний горизонтальний розмір рішення порівняно з глибиною потока.

Слід зазначити, що розроблений алгоритм дозволяє провадити розрахунки швидко та з прийнятною точністю навіть без застосування електронно-обчислювальної техніки. Всі розрахунки, результати яких наведено вище, виконані авторами за допомогою таблиць [7] без застосування ЕОМ.

У випадках, коли аналітичний розв'язок рівняння (19) невідомий, функції ω_n мають визначатися чисельними методами. Однак і в цьому випадку формули (24)–(26) дають змогу провадити дослідження впливу різних факторів на форму потока рідини.

Література

1. К. А. Бежанов, А. М. Тер-Крикоров, *Многослойные установившиеся течения идеальной несжимаемой жидкости над неровным дном*, Прикладная математика и механика **48** (1984), № 5, 750–760.
2. А. М. Тер-Крикоров, *Исследование задачи обтекания тела плоским стратифицированным потоком*, Прикладная математика и механика **57** (1993), № 3, 41–49.
3. С. В. Кравчук, *Метод расчета поля течения стратифицированной жидкости, обтекающей препятствие на дне*, Informatics, numerical and applied mathematics: theory, application, perspectives (INAMTAP'96). 4-6 Oct.1996, Kiev. Abstracts, Taras Shevchenko National University, Kiev, 1996, стор. 32.
4. А. И. Леонов, Ю. З. Миропольский, *К теории нелинейных внутренних гравитационных волн установившегося вида*, Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. **11** (1975), № 5, 491–502.
5. *Физика океана, v.2. Гидродинамика океана*, "Наука", Москва, 1978.
6. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцедентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье*, "Наука", Москва, 1977.
7. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш, *Специальные функции. Формулы, таблицы, графики*, "Наука", Москва, 1977.

КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ, 252601, КИЇВ ВУЛ. ВОЛОДИМИРСЬКА 64

Надійшла 14.10.96