

РІЗНИЦЕВИЙ ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА НА НЕОРТОГОНАЛЬНОМУ СЕМИТОЧКОВОМУ ШАБЛОНІ ПРЯМОКУТНОЇ СІТКИ ТА ЙОГО СПЕКТРАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ

УДК 519.63

М. Є. БИСТРИЦЬКИЙ ТА М. М. МОСКАЛЬКОВ

РЕЗЮМЕ. Знайдено явний вигляд власних функцій та власних значень різницевого оператора Лапласа на семиточковому шаблоні прямокутної сітки для другої крайової задачі. Знайдено оцінки максимального та мінімального власних значень. Досліджено дисперсійні властивості явної різницевої схеми для двовимірного хвильового рівняння, що використовує апроксимацію оператора Лапласа на семиточковому шаблоні.

Дослідження різницевих схем на трикутних сітках [1, 2] довели певні переваги використання шестикутних шаблонів для апроксимації рівнянь у частинних похідних. А саме, різницеве хвильове рівняння на шестикутному шаблоні трикутної сітки [1] має кращі дисперсійні властивості порівняно із схемою, що використовує чотирикутний шаблон прямокутної сітки [3]. Пропонована робота продовжує дослідження різницевих схем на неортогональних шаблонах. Проте на відміну від вищезгаданих робіт, вперше неортогональний шаблон розглядається на ортогональній (прямокутній) сітці. Використовуючи семиточковий шаблон, побудовано різницеву схему для апроксимації задачі на власні значення для диференційного оператора Лапласа у квадраті з крайовими умовами другого роду. Знайдено явний вигляд власних функцій та власних значень побудованого різницевого оператора. Зроблено оцінку максимального та мінімального власних значень. За допомогою знайдених власних значень проведено дисперсійний аналіз явної різницевої схеми для двовимірного хвильового рівняння, що використовує пропонований шаблон.

1. ПОВУДОВА РІЗНИЦЕВОГО ОПЕРАТОРА

Розглянемо на області $\Omega = \{0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$ диференційну задачу на власні значення

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad x \in \gamma_{-1} \cup \gamma_{+1}; \quad u = 0, \quad x \in \gamma_{-2} \cup \gamma_{+2}. \quad (2)$$

Тобто крайові умови другого роду задані лише на лівій та правій границях області.

Для побудови різницевого оператора Лапласа, що використовуватиме неортогональний шаблон, задамо на області $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ прямокутну сітку

$$\bar{\omega} = \{x_{1,i} = ih_1, x_{2,j} = jh_2, i = \overline{0, N_1}, j = \overline{0, N_2}, h_1 = \frac{1}{N_1}, h_2 = \frac{1}{N_2}\}. \quad (3)$$

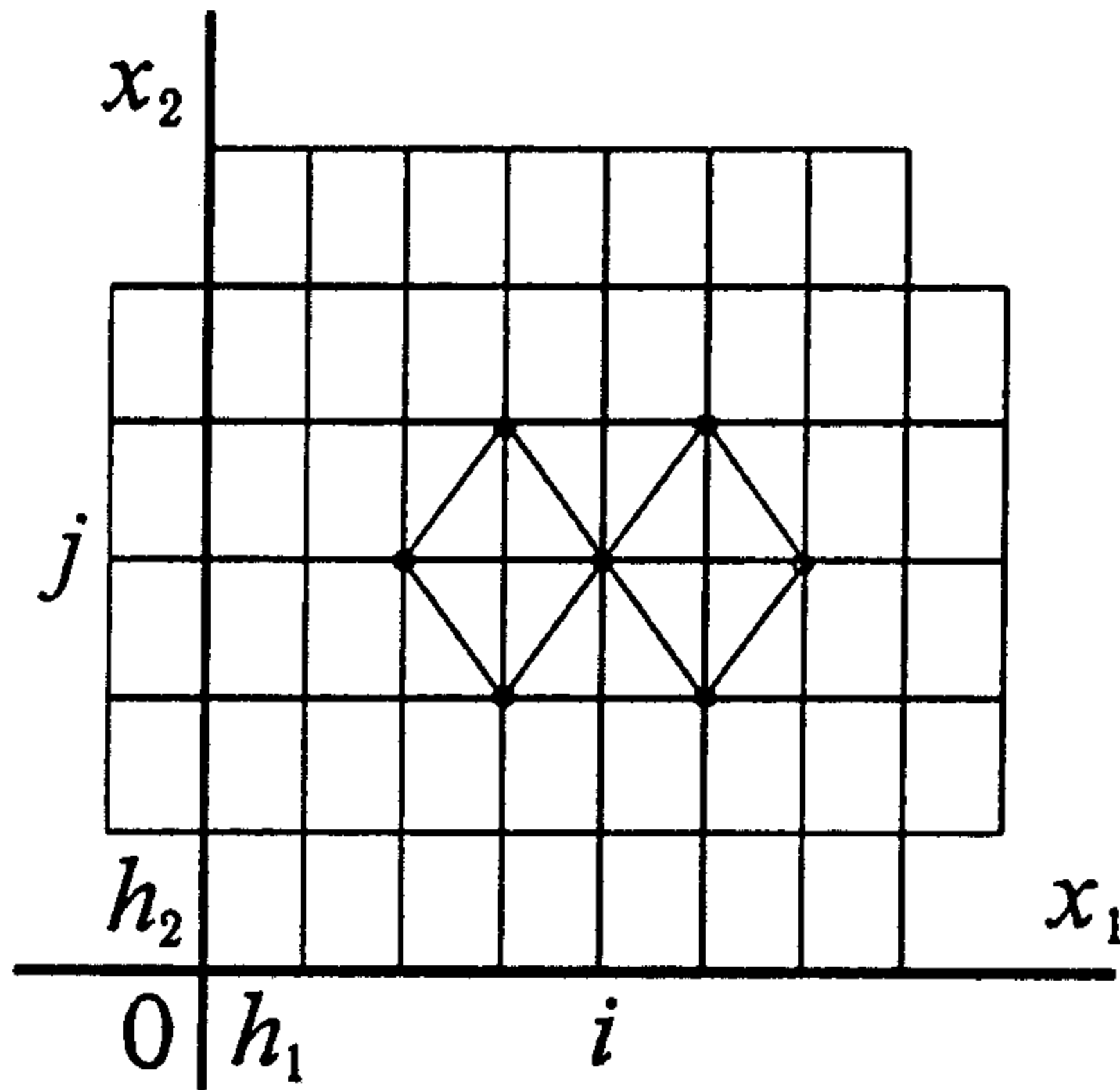


Рис. 1

Різницевий оператор у внутрішніх вузлах матиме вигляд

$$\begin{aligned} \Lambda_{\omega} y = & \left(\frac{1}{4h_1^2} - \frac{1}{4h_2^2} \right) (y_{i-2j} - 2y_{ij} + y_{i+2j}) \\ & + \frac{1}{2h_2^2} (y_{i-1j+1} + y_{i+1j-1} + y_{i-1j-1} + y_{i+1j+1} - 4y_{ij}). \end{aligned} \quad (4)$$

Неважко переконатися, що різницевий оператор апроксимує диференційний оператор Лапласа з другим порядком апроксимації на семиточковому шаблоні прямокутної сітки (див. рис. 1).

Для апроксимації граничних умов та урахування вигляду різницевого оператора у приграничних вузлах зробимо парне продовження розв'язку задачі повздовж ліву та праву границі області Ω у такий спосіб

$$u(-x_1, x_2) = u(x_1, x_2), \quad u(1 + x_1, x_2) = u(x_1, x_2).$$

Довизначимо сіткову функцію у законтурних вузлах $\gamma_1^- = \{x_1 = -h_1, x_{2,j} = jh_2, j = \overline{1, N_2}\}$ та $\gamma_1^+ = \{x_1 = 1 + h_1, x_{2,j} = jh_2, j = \overline{1, N_2}\}$ виразами $y_{-1j} = y_{1j}, y_{N_1+1j} = y_{N_1-1j}, j = \overline{1, N_2 - 1}$. За допомогою оператора (4) можна записати різницевий аналог другої крайової задачі на власні значення для диференційного оператора Лапласа (1), (2)

$$\Delta y + \mu y = 0, \quad x \in \bar{\omega}, \text{ де} \quad (5)$$

$$\Delta y = \begin{cases} \left(\frac{1}{2h_1^2} - \frac{1}{2h_2^2} \right) (y_{2j} - y_{0j}) + \frac{1}{h_2^2} (y_{1j+1} + y_{1j-1} - 2y_{0j}), & x \in \gamma_{-1}; \\ \Lambda_{\omega} y, & x \in \omega; \\ \left(\frac{1}{2h_1^2} - \frac{1}{2h_2^2} \right) (y_{N_1-2j} - y_{N_1j}) \\ + \frac{1}{h_2^2} (y_{N_1-1j+1} + y_{N_1-1j-1} - 2y_{N_1j}), & x \in \gamma_{+1}; \\ y = 0, & x \in \gamma_{-2} \cup \gamma_{+2}, \end{cases} \quad (6)$$

$$y_{-1j} = y_{1j}, \quad y_{N_1+1j} = y_{N_1-1j}, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}. \quad (7)$$

Визначимо простір $\overset{\circ}{H}_h$, як простір сіткових функцій, що задані на $\bar{\omega} \cup \gamma_1^- \cup \gamma_1^+$ та задовольняють умовам (6), (7). Скалярний добуток у цьому просторі задамо так

$$(y, \nu) = \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} h_1 h_2 y_{ij} \nu_{ij} + 0,5 \sum_{j=1}^{N_2-1} h_1 h_2 y_{0j} \nu_{0j} + 0,5 \sum_{j=1}^{N_2-1} h_1 h_2 y_{N_1j} \nu_{N_1j}. \quad (8)$$

2. ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ РІЗНИЦЕВОГО ОПЕРАТОРА

Доведемо декілька тверджень про властивості різницевого оператора (4). Без обмеження загальності розглядатимемо випадок, коли $h_1 \leq h_2$. За умови $h_1 > h_2$ всі міркування переносяться на випадок вертикально-орієнтованого семиточкового шаблону. При цьому всі вирази для такого шаблону можна отримати з виразів для горизонтально-орієнтованого шаблону формальною заміною відповідних індексів.

Твердження 1. У просторі $\overset{\circ}{H}_h$ оператор (4) самоспряжений.

Твердження доводиться аналогічно [1].

Твердження 2. Розв'язком задачі (5)-(7) є власні функції

$$y = y^{k_1 k_2} = \cos k_1 \pi i h_1 \sin k_2 \pi j h_2 \quad (9)$$

відповідні їм власні значення

$$\mu^{k_1 k_2} = \left(\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2} \right) \sin^2 k_1 \pi h_1 + \frac{2}{h_2^2} \left(\sin^2 \frac{k_1 h_1 + k_2 h_2}{2} \pi + \sin^2 \frac{k_1 h_1 - k_2 h_2}{2} \pi \right), \quad (10)$$

$$k_1 = \overline{0, N_1}, \quad k_2 = \overline{1, N_2 - 1}.$$

Доведення. Розв'язок задачі шукаємо у вигляді

$$y = \cos(\chi_1 x_1) \sin(\chi_2 x_2), \quad (x_1, x_2) \in \bar{\omega},$$

що задовольняє крайові умови при $x_1 = 0, x_2 = 0$.

Загальна кількість власних функцій збігається з кількістю вузлів сітки ω . Власні значення, що відповідають власним функціям мають вигляд

$$\mu = \frac{1}{2h_1^2} + \frac{3}{2h_2^2} - \left(\frac{1}{2h_1^2} - \frac{1}{2h_2^2} \right) \cos 2k_1 \pi h_1 - \frac{2}{h_2^2} \cos k_1 \pi h_1 \cos k_2 \pi h_2. \quad (11)$$

Як це було зроблено у [1], цей вираз тотожними перетвореннями можна звести до (10). Твердження доведене. \square

Твердження 3. Для власних значень оператора (4)

$$\mu = \left(\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2} \right) \sin^2 k_1 \pi h_1 + \frac{2}{h_2^2} \left(\sin^2 \frac{k_1 h_1 + k_2 h_2}{2} \pi + \sin^2 \frac{k_1 h_1 - k_2 h_2}{2} \pi \right),$$

виконуються оцінки (при $h_1 \leq h_2$):

$$\mu_{\max} \leq \max \left(\frac{4}{h_2^2}, \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right),$$

тобто можливі два випадки

- а) $\frac{h_2}{h_1} \geq \sqrt{3}, \quad \mu_{\max} \leq \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2};$
 б) $\frac{h_2}{h_1} \leq \sqrt{3}, \quad \mu_{\max} \leq \frac{4}{h_2^2};$

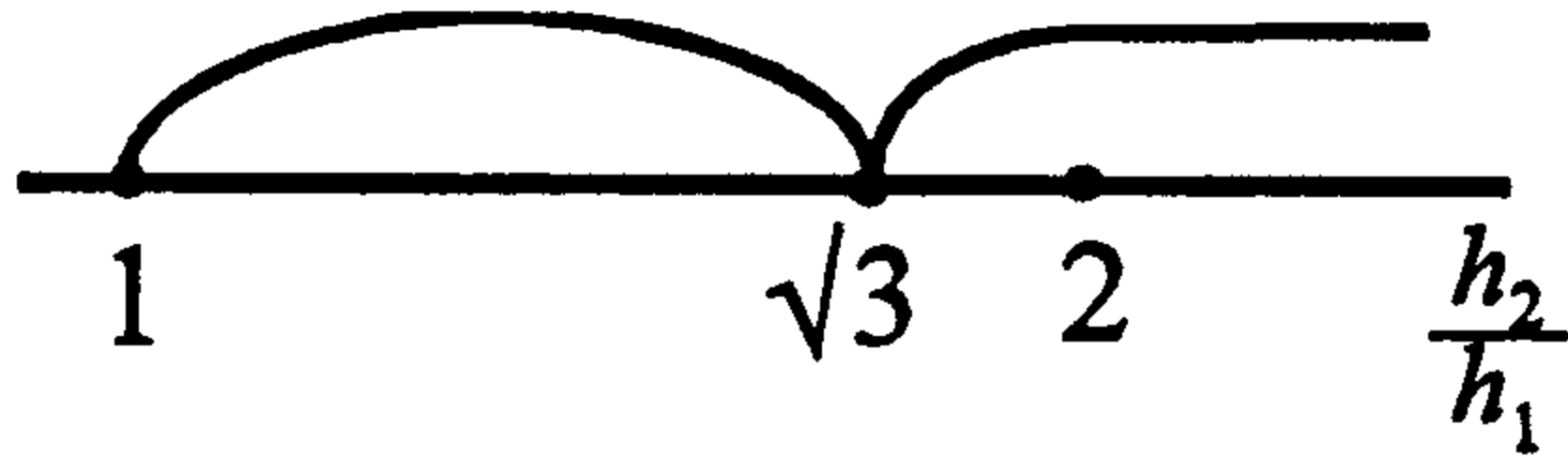


Рис. 2

та $\mu_{\min} \geq 8$.

Доведення. Для знаходження максимуму розглянемо функцію

$$\bar{\mu} = \frac{1}{2h_1^2} + \frac{3}{2h_2^2} - \left(\frac{1}{2h_1^2} - \frac{1}{2h_2^2} \right) \cos 2\xi_1 - \frac{2}{h_2^2} \cos \xi_1 \cos \xi_2,$$

$(\xi_1, \xi_2) \in \Pi = \{0 < \xi_1 < \pi, 0 < \xi_2 < \pi\}$, що при $\xi_1 = k_1\pi h_1$, $\xi_2 = k_2\pi h_2$ збігається із власними значеннями (11).

Досліджуючи цю функцію одержимо п'ять критичних точок у області Π :

- 1) $\xi_1 = 0, \xi_2 = 0$;
- 2) $\xi_1 = 0, \xi_2 = \pi$;
- 3) $\xi_1 = \frac{\pi}{2}, \xi_2 = \frac{\pi}{2}$;
- 4) $\xi_1 = \pi, \xi_2 = \pi$;
- 5) $\xi_1 = \pi, \xi_2 = 0$.

Функція $\bar{\mu}$ досягає свого максимуму у точках 2), 3) та 5), причому у точках 2) та 5) $\bar{\mu}_2 = \frac{4}{h_2^2}$, а у точці 3) $\bar{\mu}_3 = \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}$ (див. рис. 2).

Коли $h_2^2 = 3h_1^2$, тобто шаблон набуває вигляду правильного шестикутника, ці значення рівні $\bar{\mu}_2 = \bar{\mu}_3$. У цьому випадку $\mu \leq \frac{16}{3h^2}$, ($h = 2h_1$).

Використовуючи міркування [4, с.110], одержимо оцінку для мінімального власного значення оператора (4). Це значення досягається при $k_1 = 0, k_2 = 1$:

$$\begin{aligned} \mu_{\min} &= \frac{2}{h_2^2} \left(\sin^2 \frac{h_2}{2} \pi + \sin^2 \frac{-h_2}{2} \pi \right) = \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{h_2 \pi}{2} \\ &\geq \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{h_2 \pi}{2} \left(\frac{h_2 \pi}{2} \right)^{-2} \left(\frac{h_2 \pi}{2} \right)^2 = \frac{4}{h_2^2} \frac{8}{\pi^2} \frac{h_2^2 \pi^2}{4} = 8. \end{aligned}$$

Твердження доведене. \square

Зауваження 1. З огляду на похибку апроксимації оператора (4), на семиточковому шаблоні прямокутної сітки у випадку $h_2 = \sqrt{3}h_1$ можна побудувати схему для рівняння Пуассона четвертого порядку точності. У цьому випадку четвертий порядок апроксимації досягається таким вибором апроксимації правої частини різницевої схеми: $\phi = f + \frac{h_1^2}{4} \Delta f$.

Зауваження 2. Треба відзначити випадок $h_1 = h_2$. У цьому разі оператор (4) набуває вигляду "навскісний хрест"

$$\Delta u = \frac{1}{2h^2} (y_{i-1j+1} + y_{i+1j-1} + y_{i-1j-1} + y_{i+1j+1} - 4y_{ij}). \quad (12)$$

Тобто шаблон оператора використовує лише п'ять точок.

3. ДИСПЕРСІЙНИЙ АНАЛІЗ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДВОВИМІРНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

В області $\bar{\Omega}$ поставимо задачу для двовимірного хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, \quad x \in \Omega, t > 0. \quad (13)$$

$$u = 0, \quad x \in \gamma_{-2} \cup \gamma_{+2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad x \in \gamma_{-1} \cup \gamma_{+1}. \quad (14)$$

$$u = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u_1(x), \quad t = 0, \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (15)$$

Для апроксимації оператора Лапласа використаємо оператор (4) на сітці ω , а для часової змінної введемо рівномірну сітку $\omega_t = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots\}$. Різницева задача для (13)–(15) матиме вигляд

$$y_{\bar{t}t} = \Lambda y, \quad x \in \omega, t \in \omega_t. \quad (16)$$

$$y = 0, \quad x \in \gamma_{-2} \cup \gamma_{+2}. \quad (17)$$

$$y_{-1j} = y_{1j}, \quad y_{N_1+1j} = y_{N_1-1j}, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}. \quad (18)$$

$$y^0 = u_0(x), \quad y_t^0 = u_1(x) + \frac{\tau}{2} \Delta u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}. \quad (19)$$

Умова стійкості цієї схеми буде (див. [4]):

$$\tau^2 < \begin{cases} h_2^2, & \frac{h_2}{h_1} \leq \sqrt{3}, \\ \frac{4h_1^2 h_2^2}{h_1^2 + h_2^2}, & \frac{h_2}{h_1} \geq \sqrt{3}. \end{cases} \quad (20)$$

Ця умова дозволяє використати дещо більший крок за часом, ніж умова стійкості $\tau^2 < \frac{h_1^2 h_2^2}{h_1^2 + h_2^2}$ явної схеми на шаблоні типу “хрест” [4]. Для дисперсійного аналізу схеми (16)–(19) (див. [1, 3]) шукатимемо розв’язок у вигляді гармонік

$$y_{ij}^n = q^n \exp\{i(\chi_1 x_1 + \chi_2 x_2)\}, \quad x \in \omega, i^2 = -1. \quad (21)$$

Після підстановки (21) у схему (16) одержимо квадратне рівняння для визначення q

$$q^2 - 2\left(1 - \frac{\tau^2 \mu}{2}\right)q + 1 = 0. \quad (22)$$

У цьому рівнянні

$$\mu = \frac{1}{2h_1^2} + \frac{3}{2h_2^2} - \left(\frac{1}{2h_1^2} - \frac{1}{2h_2^2}\right) \cos 2\chi_1 h_1 - \frac{2}{h_2^2} \cos \chi_1 h_1 \cos \chi_2 h_2,$$

при $\chi_1 = k_1 \pi$ та $\chi_2 = k_2 \pi$ — власні значення оператора (4). За виконання умови стійкості (20) рівняння (22) має два комплексно спряжені кореня $|q_1| = |q_2| = 1$, що мають вигляд $q_{1,2} = \exp\{\pm i\phi\}$. Тому, зважаючи на вираз $\cos \phi = 1 - \frac{\tau^2 \mu}{2}$, аргумент множника q може бути записаний у вигляді $\phi = 2 \arcsin \frac{\tau \sqrt{\mu}}{2}$. Фазова швидкість сіткових гармонік

$$\bar{\nu} = \frac{\phi}{\tau \chi}, \quad (23)$$

де $\chi = \sqrt{\chi_1^2 + \chi_2^2}$ — модуль хвильового вектора $\bar{\chi} = (\chi_1, \chi_2)$. Зауважимо, що для фазової швидкості диференційного рівняння (13) $\nu = 1$ при всіх χ_1, χ_2 . Знайдемо розклад виразу фазової швидкості сіткових гармонік (23) по степенях χ_1, χ_2

$$\bar{\nu} = 1 + \frac{\tau^2 \chi^2}{24} + \frac{1}{\chi^2} \left[\frac{\chi_1^4 h_1^4}{8h_2^2} - \frac{\chi_1^4 h_1^2}{6} - \frac{\chi_2^4 h_2^2}{24} - \frac{\chi_1^2 \chi_2^2 h_1^2}{4} \right] + O(\chi_1^4 + \chi_2^4). \quad (24)$$

Тобто у дискретному середовищі задачі (16)–(19) має місце дисперсія гармонік. Змінюючи h_1, h_2 , дістанемо різні дисперсійні властивості різницевої схеми. Так,

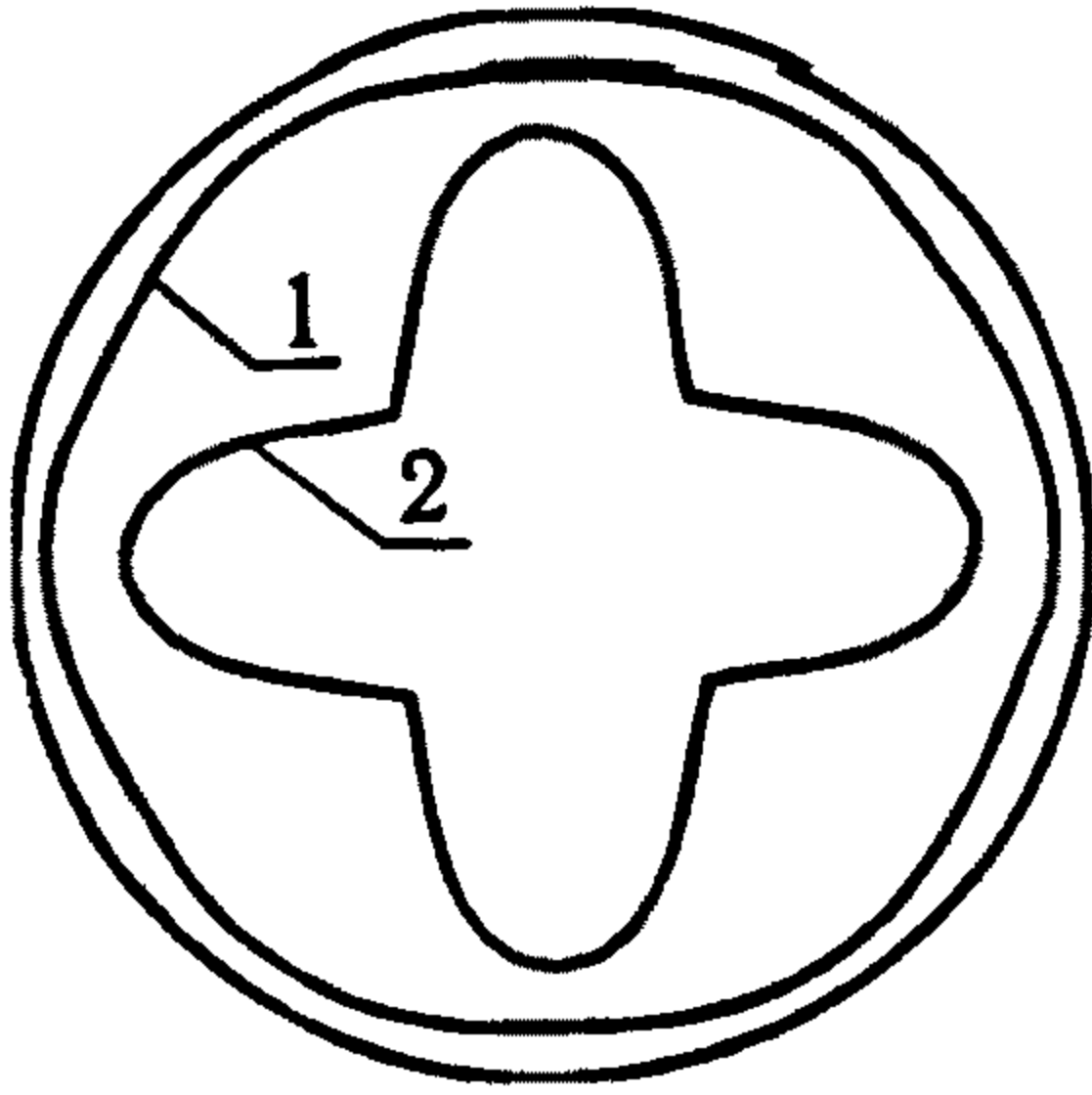


Рис. 3

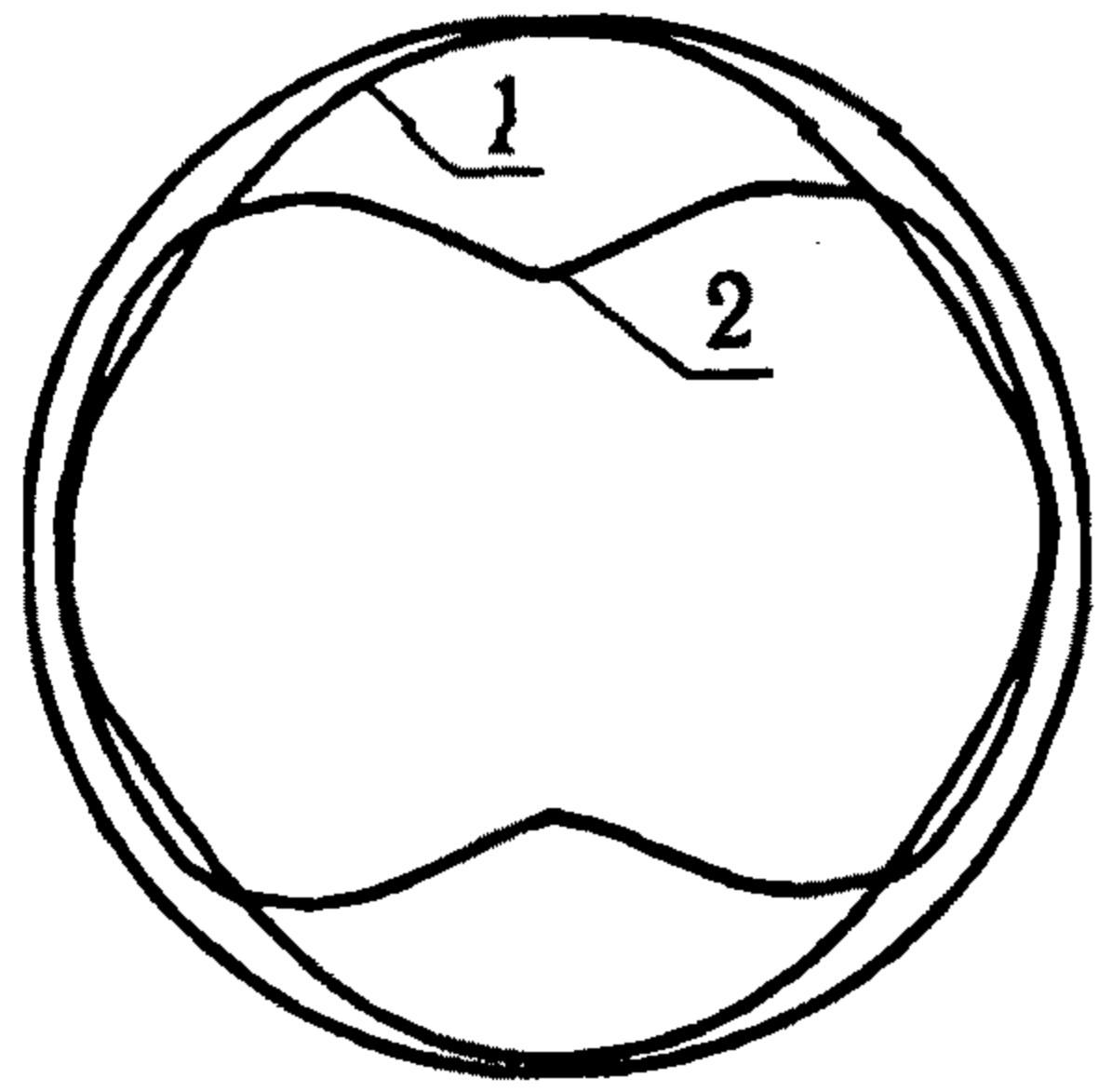


Рис. 4

скажімо, коли $h_2^2 = 3h_1^2$, — головний член розкладу не залежить від напрямку хвильового вектора, що відповідає [1].

На рис. 3 зображено дисперсійні криві $\bar{\nu} = \bar{\nu}(\chi, \phi)$ як функції ϕ для різницевої схеми при $\chi = 10\pi$, де 1 — $h_2^2 = 3h_1^2$, $h_1 = 0.05$, $\tau = 0.08$; 2 — $h_2 = h_1 = 0.1$, $\tau = 0.09$. Зауважимо, що вигляд кривої 1 збігається з виглядом дисперсійної кривої для правильної трикутної сітки [1].

На рис. 4 наведено криві для різних h_1, h_2 : 1 — $h_2 = 1.45h_1$, $h_1 = 0.05$, $\tau = 0.07$; 2 — $h_2 = 2.5h_1$, $h_1 = 0.05$, $\tau = 0.09$. При виборі τ враховувалися умови стійкості схеми. Можна побачити, що у випадку 1 дисперсія краща у напрямку x_2 , а у випадку 2 у напрямку x_1 . Можливість вибору різних h_1, h_2 може стати у нагоді, коли рух у двовимірному середовищі мало відрізняється від одновимірного. Тоді можна вибрати такі кроки сітки, щоб дисперсійні властивості схеми за домінуючим напрямком були найкращі [3]. Розглядаючи дисперсійні криві при різних $p = \frac{h_2}{h_1}$, бачимо, що найкращі дисперсійні властивості за всіма напрямками схема має при $p \rightarrow \sqrt{3}$ (у цьому випадку шаблон — правильний шестикутник). Проведений аналіз демонструє переваги пропонованого семиточкового шаблону прямокутної сітки порівняно із шаблоном типу “хрест”, а також доводить, що властивості розглянутого неортогонального шаблону на прямокутній сітці не гірші за властивості відповідного шаблону на трикутній сітці.

ЛІТЕРАТУРА

1. В. Л. Макаров, С. В. Макаров, М. Н. Москальков, *Спектральные свойства разностного оператора Лапласа на шестиугольной сетке и некоторые их применения*, Дифференциальные уравнения 29 (1993), № 7, 1216–1221.
2. В. Л. Макаров, С. В. Макаров, *О точности разностных схем для квазилинейных эллиптических уравнений в ромбе с решениями из класса $W_2^k(\Omega)$, $1 < k \leq 4$* , Дифференциальные уравнения 25 (1989), № 7, 1240–1249.
3. М. Н. Москальков, *Дисперсия разностных схем для двумерных волновых уравнений*, Краевые задачи математической физики (1990), Киев, 126–132.
4. А. А. Самарский, *Теория разностных схем*, “Наука”, Москва, 1983.