Обчислювальна та прикладна математика
Вип. 82, 1997, стор. 13–17

Computational and Applied Mathematics
No. 82, 1997, pp. 13–17

ОЦІНКА ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ РІЗНИЦЕВИХ СХЕМ ДЛЯ ПЕРШОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ В ОБЛАСТЯХ ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ

УДК 518:517.944/947

С. О. ВОЙЦЕХОВСЬКИЙ

РЕЗЮМЕ. В даній роботі для першої крайової задачі теорії пружності в областях довільної форми за допомогою метода фіктивних областей і операторів точних різницевих схем побудована різницева схема, яка так само має порядок точності $O(h^{\frac{1}{2}})$ у нормі $W_2^1(\Omega)$.

1. Вступ

В роботі [1] для задачі Діріхле для системи Ламе в областях довільної форми була запропонована різницева схема, яка має порядок точності $O(h^{\frac{1}{2}})$ у нормі $W_2^1(\Omega)$. В даній роботі для першої крайової задачі теорії пружності в областях довільної форми за допомогою метода фіктивних областей і операторів точних різницевих схем побудована різницева схема, яка так само має порядок точності $O(h^{\frac{1}{2}})$ у нормі $W_2^1(\Omega)$, проте є більш простою для реалізації на ЕОМ.

2. Постановка задачі

Нехай Ω — обмежена однозв'язна область на площині змінних $x = (x_1, x_2)$ з границею $\Gamma \in C^2$. Розглянемо в Ω крайову задачу

$$-\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(K_{\alpha\beta}\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_\beta}\right) = \vec{f}(x), \qquad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$\vec{u}(x) = 0, \qquad x \in \Gamma, \tag{2}$$

де

$$\vec{u}(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} \text{ — вектор пружних переміщень,}$$

$$\vec{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \text{ — вектор зовнішніх сил,}$$

матриці $K_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2$ мають вигляд

$$K_{11} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \qquad K_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_{21} = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}, \qquad K_{22} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu \end{pmatrix},$$

$\lambda > 0$, $\mu > 0$ — коефіцієнти Ламе, які характеризують пружні властивості тіла.

Припустимо, що $\vec{f}(x) \in L_2(\Omega)$. Розв'язок задачі (1),(2) існує, єдиний, належить простору $W_2^2(\Omega)$ і для нього справедлива апріорна оцінка

$$\|\vec{u}\|_{W_2^2(\Omega)} \leq M\|\vec{f}\|_{L_2(\Omega)}. \tag{3}$$

Через M тут і далі будемо позначати константи, які не залежать від $\vec{f}$, ε і h.

Скористаємося для розв'язування задачі (1),(2) методом фіктивних областей. Доповнимо вихідну область Ω до прямокутника $\Omega_0 = \{x = (x_1, x_2)\colon 0 < x_\alpha < l_\alpha,\ \alpha = 1, 2\}$, границю якого позначимо Γ_0.

У прямокутнику Ω_0 розглянемо таку задачу Діріхле

$$-\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(K_{\alpha\beta}\frac{\partial \vec{u}_\varepsilon}{\partial x_\beta}\right) + Q_\varepsilon(x)\vec{u}_\varepsilon = \vec{\bar{f}}(x), \qquad x \in \Omega_0, \tag{4}$$

$$\vec{u}_\varepsilon(x) = 0, \qquad x \in \Gamma_0, \tag{5}$$

де

$$\vec{\bar{f}}(x) = \begin{pmatrix} \bar{f}_1(x) \\ \bar{f}_2(x) \end{pmatrix}, \qquad \bar{f}_\alpha(x) = \begin{cases} f_\alpha(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \Omega_1 = \Omega_0 \setminus \Omega, \end{cases} \qquad \alpha = 1, 2,$$

$$Q_\varepsilon(x) = \begin{pmatrix} q_\varepsilon(x) & 0 \\ 0 & q_\varepsilon(x) \end{pmatrix}, \qquad q_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega, \\ \varepsilon^{-1}, & x \in \Omega_1, \end{cases}$$

ε — достатньо мале додатнє число.

Задача (4),(5) має єдиний розв'язок, який належить простору $W_2^2(\Omega_0)$ і для нього справедлива апріорна оцінка

$$\left\|\vec{u}_\varepsilon\right\|_{W_2^2(\Omega_0)} \leq M\varepsilon^{\frac{1}{4}}\left\|\vec{f}\right\|_{L_2(\Omega)}. \tag{6}$$

Відомо, що розв'язок задачі (4),(5) збігається при $\varepsilon \to 0$ до розв'язку задачі (1),(2), при цьому має місце оцінка швидкості збіжності

$$\left\|\vec{u} - \vec{u}_\varepsilon\right\|_{W_2^1(\Omega_0)} \leq M\varepsilon^{\frac{1}{4}}\left\|\vec{f}\right\|_{L_2(\Omega)}. \tag{7}$$

3. Результати

У прямокутнику $\bar{\Omega}_0$ введемо рівномірну сітку $\bar{\omega} = \omega \cup \gamma$, де ω — множина внутрішніх, а γ — множина граничних вузлів відповідно.

Задачу (4),(5) будемо апроксимувати різницевою схемою

$$-\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \left(K_{\alpha\beta}\vec{y}_{\bar{x}_\beta}\right)_{x_\alpha} + T_1T_2(Q_\varepsilon)\vec{y} = T_1T_2(\vec{\bar{f}}), \qquad x \in \omega, \tag{8}$$

$$\vec{y}(x) = 0, \qquad x \in \gamma, \tag{9}$$

де T_α — оператори точних різницевих схем

$$T_\alpha u(x) = \int_{-1}^{1} (1 - |t|)u(x_1 + (2-\alpha)th_1, x_2 + (\alpha - 1)th_2)\, dt, \qquad \alpha = 1, 2.$$

Методом енергетичних нерівностей для розв'язку різницевої задачі (8),(9) встановимо апріорну оцінку

$$\left\|\vec{y}\right\|_{W_2^1(\omega)} \leq M\left\|\vec{f}\right\|_{L_2(\Omega)}.$$

Отже, різницева схема (8),(9) має єдиний розв'язок.

Дослідимо швидкість збіжності різницевої задачі (8),(9). Для похибки $\vec{z} = \vec{y} - \vec{u}_\varepsilon$ маємо задачу

$$-\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\left(K_{\alpha\beta}\vec{z}_{\bar{x}_\beta}\right)_{x_\alpha} + T_1T_2(Q_\varepsilon)\vec{z} = -\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\left(\vec{\eta}_{\alpha\beta}\right)_{x_\alpha} + \vec{\eta}_0 + \vec{\eta}_*, \qquad x \in \omega, \tag{10}$$

$$\vec{z}(x) = 0, \qquad x \in \gamma, \tag{11}$$

$$\vec{\eta}_{\alpha\beta}(x) = K_{\alpha\beta}\left(S_\alpha^- T_{3-\alpha}\left(\frac{\partial \vec{u}_\varepsilon}{\partial x_\beta}\right) - \vec{u}_{\varepsilon\bar{x}_\beta}\right), \qquad \alpha,\beta = 1,2,$$

$$S_\alpha^-(x) = \int_{-1}^{0} u(x_1 + (2-\alpha)th_1, x_2 + (\alpha-1)th_2)\,dt, \qquad \alpha = 1,2,$$

$$\vec{\eta}_0(x) = T_1T_2(Q_\varepsilon\vec{u}_\varepsilon) - T_1T_2(Q_\varepsilon)T_1T_2(\vec{u}_\varepsilon),$$

$$\vec{\eta}_*(x) = T_1T_2(Q_\varepsilon)(T_1T_2(\vec{u}_\varepsilon) - \vec{u}_\varepsilon).$$

Помножимо рівняння (10) скалярно в $L_2(\omega)$ на $\vec{z}(x)$. Використовуючи формули підсумовування за частинами, дістанемо

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\left(\left(K_{\alpha\beta}\vec{z}_{\bar{x}_\beta}\right), \vec{z}_{\bar{x}_\alpha}\right)_\alpha + \left\|\sqrt{T_1T_2(q_\varepsilon)}\vec{z}\right\|^2_{L_2(\omega^*\cup\gamma^*)}$$
$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\left(\vec{\eta}_{\alpha\beta}, \vec{z}_{\bar{x}_\alpha}\right)_\alpha + (\vec{\eta}_0, \vec{z})_{L_2(\omega)} + (\vec{\eta}_*, \vec{z})_{L_2(\omega)}, \tag{12}$$

де

$$(\vec{\nu}, \vec{w})_{L_2(\omega)} = \sum_\omega h_1h_2(\nu_1w_1 + \nu_2w_2),$$

$$(\vec{\nu}, \vec{w})_1 = \sum_{x_1=h_1}^{l_1}\sum_{x_2=h_2}^{l_2-h_2} h_1h_2(\nu_1w_1 + \nu_2w_2),$$

$$(\vec{\nu}, \vec{w})_2 = \sum_{x_1=h_1}^{l_1-h_1}\sum_{x_2=h_2}^{l_2} h_1h_2(\nu_1w_1 + \nu_2w_2),$$

$$\omega_* = \{x \in \omega\colon e(x) \in \Omega_1 \wedge e(x) \notin \Omega\},$$

$$\gamma_* = \{x \in \omega\colon e(x) \in \Omega \wedge e(x) \in \Omega_1\},$$

$$e(x) = (x_1 - h_1, x_1 + h_1) \times (x_2 - h_2, x_2 + h_2).$$

Використовуючи нерівність Коші-Буняковського, з (12) маємо

$$\mu|\vec{z}|^2_{W_2^1(\omega)} + \left\|\sqrt{T_1T_2(q_\varepsilon)}\vec{z}\right\|^2_{L_2(\omega^*\cup\gamma^*)} \le \left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\left\|\vec{\eta}_{\alpha\beta}\right\|_\alpha\right)|\vec{z}|_{W_2^1(\omega)}$$
$$+ \left\|\frac{\vec{\eta}_0}{\sqrt{T_1T_2(q_\varepsilon)}}\right\|_{L_2(\gamma^*)}\left\|\sqrt{T_1T_2(q_\varepsilon)}\vec{z}\right\|_{L_2(\gamma^*)} \tag{13}$$
$$+ \left\|\sqrt{T_1T_2(q_\varepsilon)}(T_1T_2(\vec{u}_\varepsilon) - \vec{u}_\varepsilon)\right\|_{L_2(\omega^*\cup\gamma^*)}\left\|\sqrt{T_1T_2(q_\varepsilon)}\vec{z}\right\|_{L_2(\omega^*\cup\gamma^*)},$$

а також нерівності (3),(6) і (7), з (16) дістанемо

$$|\vec{z}|_{W_2^1(\omega)} \le Mh\left[\varepsilon^{-\frac{1}{4}} + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^{-\frac{3}{4}}h\right]\|\vec{f}\|_{L_2(\Omega)}. \qquad (17)$$

Поклавши в (17) $\varepsilon = h^2$, знаходимо

$$|\vec{z}|_{W_2^1(\omega)} \le Mh^{\frac{1}{2}}\|\vec{f}\|_{L_2(\Omega)}. \qquad (18)$$

Враховуючи нерівність

$$\left\|\hat{\vec{y}} - \vec{u}\right\|_{W_2^1(\Omega)} \le \left\|\hat{\vec{y}} - \hat{\vec{u}}_\varepsilon\right\|_{W_2^1(\Omega_0)} + \left\|\hat{\vec{u}}_\varepsilon - \vec{u}_\varepsilon\right\|_{W_2^1(\Omega_0)} + \left\|\vec{u}_\varepsilon - \vec{u}\right\|_{W_2^1(\Omega)},$$

маємо оцінку

$$\left\|\hat{\vec{y}} - \vec{u}\right\|_{W_2^1(\Omega)} \le M\left(h^{\frac{1}{2}} + h\varepsilon^{-\frac{1}{4}} + \varepsilon^{\frac{1}{4}}h\right)\|\vec{f}\|_{L_2(\Omega)},$$

з якої при $\varepsilon = h^2$ дістанемо

$$\left\|\hat{\vec{y}} - \vec{u}\right\|_{W_2^1(\Omega)} \le Mh^{\frac{1}{2}}\|\vec{f}\|_{L_2(\Omega)},$$

де $\hat{\vec{y}}(x)$ полілінійне поповнення сіткової функції $\vec{y}(x)$ [3].

Таким чином, встановлена

Теорема. *Поповнення сіткової функції $\vec{y}(x)$, яка є розв'язком різницевої задачі* (8),(9) ($\varepsilon = h^2$) *збігається при $h \to 0$ до розв'язку $\vec{u}(x)$ задачі* (1),(2), *при цьому справедлива оцінка швидкості збіжності*

$$\left\|\hat{\vec{y}} - \vec{u}\right\|_{W_2^1(\Omega)} \le Mh^{\frac{1}{2}}\|\vec{f}\|_{L_2(\Omega)}.$$

Література

1. С. О. Войцеховський, Т. Г. Войцеховська, *Оцінка швидкості збіжності в W_2^1-нормі різницевих схем для першої крайової задачі теорії пружності в областях довільної форми*, Вісник Київського університету (1994), 42–48.
2. А. А. Самарский, Р. Д. Лазаров, В. Л. Макаров, *Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями*, "Высшая школа", Москва, 1987.
3. Л. А. Оганесян, Л. А. Руховец, *Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений*, изд-во АН Арм.ССР, Ереван, 1979.

КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ, 252601, КИЇВ, ВОЛОДИМИРСЬКА 64

Надійшла 05.10.96