Обчислювальна та прикладна математика
Вип. 82, 1997, стор. 18–23

Computational and Applied Mathematics
No. 82, 1997, pp. 18–23

ПРО ОДИН ЧИСЕЛЬНИЙ АЛГОРИТМ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПРОЯВЛЕННЯ ЗОБРАЖЕННЯ В РЕЛЬЄФОГРАФІЇ

УДК 517.53

О. Ю. ГРИЩЕНКО

РЕЗЮМЕ. Побудований алгоритм розв'язування задачі динаміки рельєфу на поверхні ньютонівської рідини. Функція риску визначається методом верхньої релаксації. Поле вектора швидкостей — за допомогою двокрокового скінченно-різницевого алгоритму, який дає змогу спростити обчислення та збільшити можливі розміри системи скінченно-різницевих рівнянь. Доведена в роботі теорема про стійкість алгоритму за початковими даними та збіжність чисельного розв'язку до точного.

Визначення рельєфу поверхні, який відтворює записану голографічну інформацію, приводить до розв'язування початково- крайової задачі [1].

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial \nu}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right); \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + 2\frac{\partial \nu}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}; \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \qquad x, y \in G = \{0 \le x \le l, -d \le y \le 0\}, \qquad (3)$$

$$P|_{y=0} - 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\bigg|_{y=0} + P_M\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\bigg|_{y=0} = P_n(x,t); \qquad h = \int_0^t v(x,y,\tau)|_{y=0}\,d\tau;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{y=0} + \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0} = 0; \quad v|_{y=-d} = u|_{y=-d} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial y}\bigg|_{y=-d} = 0;$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=l}; \quad \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}; \quad v|_{x=0} = v|_{x=l}; \quad \frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{x=l};$$

$$P|_{x=0} = P|_{x=l}; \quad \frac{\partial P}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \frac{\partial P}{\partial x}\bigg|_{x=l}; \quad v|_{t=0} = u|_{t=0} = 0; \quad P|_{t=0} = 0.$$

Тут l — розмір області по x, P_M — коефіцієнт поверхневого натягу, u, v — складові вектора швидкості, P — гідродинамічний тиск, ν — коефіцієнт кінематичної в'язкості, x, y — просторові координати, t — час, ρ — густина рідини, a_k, τ_1, τ_2 — задані параметри, P_n — нормальна складова поверхневої сили:

$$\bar{P}_n(\bar{x},t) = F_y\cos(a_k x)\left[\exp\left\{-\frac{t}{\tau_1}\right\} - \exp\left\{-\frac{t}{\tau_2}\right\}\right].$$

Для знаходження функції тиску, після нескладних перетворень (1)–(3) одержимо рівняння Пуассона [2]

$$\Delta P = -\rho\left(\frac{\partial \nu}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial D}{\partial t} - \nu\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad (4)$$

де $D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$.

Введемо сіткову область $\Omega_{h,\tau} = \{(x_i, y_i, t_n) | x_i = ih_1,\ y_j = jh_2,\ t_n = n\tau,\ i = \overline{0,K},\ j = \overline{0,m},\ n = \overline{0,N};\ h_1 = l/K;\ h_2 = d/m;\ \vec{h} = (h_1, h_2)\}$, на якій побудуємо скінченно-різницевий аналог рівняння (4) по п'ятиточковій схемі. Екстраполюючи граничні умови за часом, розв'язок різницевого рівняння Пуассона знаходимо методом верхньої релаксації [2]. Значення функції u і v визначаємо з рівнянь (1)–(2) за допомогою двокрокового явно-неявного алгоритму [3]. Для цього сіткову область на кожному часовому кроці розщеплюємо на дві підобласті $\Omega_h^{(1,n)} = \{(x_i, y_i, t_n) | x_i = ih_1,\ y_j = jh_2,\ t_n = n\tau,\ i = \overline{0,K},\ j = \overline{0,m},\ n = \overline{0,N};\ i + j + n$ — непарне $\}$ і $\Omega_h^{(2,n)} = \{(x_i, y_i, t_n) | x_i = ih_1,\ y_j = jh_2,\ t_n = n\tau,\ i = \overline{0,K},\ j = \overline{0,m},\ n = \overline{0,N};\ i + j + K$ — парне $\}$. На $2n+1$ та $2n+2$ часових кроках з вузлами сітки $\Omega_h^{(1,n)}$ пов'язуємо явні різницеві схеми, для рівнянь (1)–(2)

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{2n+1} = u_{i,j}^{2n} + \tau\Bigg[&\left(\frac{u_{i,j+1}^{2n} - u_{i,j-1}^{2n}}{2h_2} + \frac{v_{i+1,j}^{2n} - v_{i-1,j}^{2n}}{2h_1}\right) \cdot \frac{\nu_{i,j+1}^{2n+1} - \nu_{i,j-1}^{2n+1}}{2h_2} \\ &- \frac{P_{i+1,j}^{2n} - P_{i-1,j}^{2n}}{2\rho h_1} \\ &+ \nu_{i,j}^{2n+1}\left(\frac{u_{i+1,j}^{2n} - 2u_{i,j}^{2n} + u_{i-1,j}^{2n}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1}^{2n} - 2u_{i,j}^{2n} + u_{i,j-1}^{2n}}{h_2^2}\right)\Bigg], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} v_{i,j}^{2n+1} = v_{i,j}^{2n} + \tau\Bigg[&\frac{v_{i,j+1}^{2n} - v_{i,j-1}^{2n}}{h_2} \cdot \frac{\nu_{i,j+1}^{2n+1} - \nu_{i,j-1}^{2n+1}}{2h_2} - \frac{P_{i,j+1}^{2n} - P_{i,j-1}^{2n}}{2\rho h_2} \\ &+ \nu_{i,j}^{2n+1}\left(\frac{v_{i+1,j}^{2n} - 2v_{i,j}^{2n} + v_{i-1,j}^{2n}}{h_1^2} + \frac{v_{i,j+1}^{2n} - 2v_{i,j}^{2n} + v_{i,j-1}^{2n}}{h_2^2}\right)\Bigg], \end{aligned} \quad (6)$$

а з вузлами області $\Omega_h^{(1,n)}$ — такі неявні:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{2n+1} = u_{i,j}^{2n} + \tau\Bigg[&\left(\frac{u_{i,j+1}^{2n+1} - u_{i,j-1}^{2n+1}}{2h_2} + \frac{v_{i+1,j}^{2n+1} - v_{i-1,j}^{2n+1}}{2h_1}\right) \cdot \frac{\nu_{i,j+1}^{2n+1} - \nu_{i,j-1}^{2n+1}}{2h_2} \\ &- \frac{P_{i+1,j}^{2n+1} - P_{i-1,j}^{2n+1}}{2\rho h_1} + \nu_{i,j}^{2n+1}\Bigg(\frac{u_{i+1,j}^{2n+1} - 2u_{i,j}^{2n+1} + u_{i-1,j}^{2n+1}}{h_1^2} \\ &+ \frac{u_{i,j+1}^{2n+1} - 2u_{i,j}^{2n+1} + u_{i,j-1}^{2n+1}}{h_2^2}\Bigg)\Bigg], \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} v_{i,j}^{2n+1} = v_{i,j}^{2n} + \tau\Bigg[&\frac{v_{i,j+1}^{2n+1} - v_{i,j-1}^{2n+1}}{h_2} \cdot \frac{\nu_{i,j+1}^{2n+1} - \nu_{i,j-1}^{2n+1}}{2h_2} - \frac{P_{i,j+1}^{2n+1} - P_{i,j-1}^{2n+1}}{2\rho h_1} \\ &+ \nu_{i,j}^{2n+1}\Bigg(\frac{v_{i+1,j}^{2n+1} - 2v_{i,j}^{2n+1} + v_{i-1,j}^{2n+1}}{h_1^2} \\ &+ \frac{v_{i,j+1}^{2n+1} - 2v_{i,j}^{2n+1} + v_{i,j-1}^{2n+1}}{h_2^2}\Bigg)\Bigg]. \end{aligned} \quad (8)$$

Розв'язування починаємо з області $\Omega_h^{(1,n)}$, використовуючи схеми (5)–(6). Для кожної точки області $\Omega_h^{(2,n)}$, значення $u_{i\pm1,j\pm1}^{2n+1}$ і $v_{i\pm1,j\pm1}^{2n+1}$ будуть визначені в сусідніх чотирьох вузлах, а отже, неявні формули (7)–(8) дають змогу визначати проекції вектора швидкості явно. Збільшивши номер n на l, і змінивши цим належність просторових точок до $\Omega_h^{(1,n)}$ і $\Omega_h^{(2,n)}$, обчислимо значення $u_{i,j}^{2n+2}$ та $v_{i,j}^{2n+2}$, які і приймаємо за розв'язок на наступному часовому кроці.

Розглянемо питання стійкості двокрокового алгоритму за початковими даними. Позначимо чисельний результат розв'язку скінченно-різницевих рівнянь (5)–(8) через $U_{i,j}^n = u_{i,j}^n + \varepsilon_{i,j}^n$ та $V_{i,j}^n = v_{i,j}^n + \delta_{i,j}^n$, де $u_{i,j}^n$, $v_{i,j}^n$ — точні розв'язки цих рівнянь, а $\varepsilon_{i,j}^n$ та $\delta_{i,j}^n$ відповідні похибки обчислень. Тоді для сіткових функцій похибок одержимо

$$\begin{aligned}\varepsilon_{i,j}^{2n+1} = \varepsilon_{i,j}^{2n} + \tau\Bigg[&\left(\frac{\varepsilon_{i,j+1}^{2n} - \varepsilon_{i,j-1}^{2n}}{2h_2} + \frac{\delta_{i+1,j}^{2n} - \delta_{i-1,j}^{2n}}{2h_1}\right)\cdot\frac{\nu_{i,j+1}^{2n+1} - \nu_{i,j-1}^{2n+1}}{2h_2}\\ &+ \nu_{i,j}^{2n+1}\left(\frac{\varepsilon_{i+1,j}^{2n} - 2\varepsilon_{i,j}^{2n} + \varepsilon_{i-1,j}^{2n}}{h_1^2}\right.\\ &\left.+ \frac{\varepsilon_{i,j+1}^{2n} - 2\varepsilon_{i,j}^{2n} + \varepsilon_{i,j-1}^{2n}}{h_2^2}\right)\Bigg],\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{i,j}^{2n+2} = \varepsilon_{i,j}^{2n+1} + \tau\Bigg[&\left(\frac{\varepsilon_{i,j+1}^{2n+2} - \varepsilon_{i,j-1}^{2n+2}}{2h_2} + \frac{\delta_{i+1,j}^{2n+2} - \delta_{i-1,j}^{2n+2}}{2h_1}\right)\cdot\frac{\nu_{i,j+1}^{2n+1} - \nu_{i,j-1}^{2n+1}}{2h_2}\\ &+ \nu_{i,j}^{2n+1}\left(\frac{\varepsilon_{i+1,j}^{2n+2} - 2\varepsilon_{i,j}^{2n+2} + \varepsilon_{i-1,j}^{2n+2}}{h_1^2}\right.\\ &\left.+ \frac{\varepsilon_{i,j+1}^{2n+2} - 2\varepsilon_{i,j}^{2n+2} + \varepsilon_{i,j-1}^{2n+2}}{h_2^2}\right)\Bigg],\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\delta_{i,j}^{2n+1} = \delta_{i,j}^{2n} + \tau\Bigg[&\frac{\delta_{i,j+1}^{2n} - \delta_{i,j-1}^{2n}}{h_2}\cdot\frac{\nu_{i,j+1}^{2n+1} - \nu_{i,j-1}^{2n+1}}{2h_2}\\ &+ \nu_{i,j+1}^{2n+1}\left(\frac{\delta_{i+1,j}^{2n} - 2\delta_{i,j}^{2n} + \delta_{i-1,j}^{2n}}{h_1^2}\right.\\ &\left.+ \frac{\delta_{i,j+1}^{2n} - 2\delta_{i,j}^{2n} + \delta_{i,j-1}^{2n}}{h_2^2}\right)\Bigg],\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\delta_{i,j}^{2n+2} = \delta_{i,j}^{2n+1} + \tau\Bigg[&\frac{\delta_{i,j+1}^{2n+2} - \delta_{i,j-1}^{2n+2}}{h_2}\cdot\frac{\nu_{i,j+1}^{2n+1} - \nu_{i,j-1}^{2n+1}}{2h_2}\\ &+ \nu_{i,j}^{2n+1}\left(\frac{\delta_{i+1,j}^{2n+2} - 2\delta_{i,j}^{2n+2} + \delta_{i-1,j}^{2n+2}}{h_1^2}\right.\\ &\left.+ \frac{\delta_{i,j+1}^{2n+2} - 2\delta_{i,j}^{2n+2} + \delta_{i,j-1}^{2n+2}}{h_2^2}\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{12}$$

Нехай функції початкового розподілу похибок $\varepsilon(x, y, 0) = \tilde{\varepsilon}(x, y)$ і

$\delta(x,y,0) = \tilde{\delta}(x,y)$, визначені в вузлах сітки, допускають розвинення в абсолютно збіжні ряди Фур'є

$$\varepsilon^0_{i,j} = \sum_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty} B^1_{k_1,k_2} \exp\{I(ih_1k_1 + jh_2k_2)\},$$
$$\delta^0_{i,j} = \sum_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty} B^2_{k_1,k_2} \exp\{I(ih_1k_1 + jh_2k_2)\}. \qquad (13)$$

Теорема. *Якщо функції* $\varepsilon(x,y,0)$ *і* $\delta(x,y,0)$ *задовольняють умові* (13) *і крок сітки за часом сталий або змінюється через парне число кроків, то чисельний розв'язок задачі* (1)–(2), *побудований за допомогою двокрокового явно-неявного алгоритму* (5)–(8), *стійкий за початковими умовами.*

Доведення. Проведемо дослідження поведінки похибок $\varepsilon^n_{i,j}$ і $\delta^n_{i,j}$. За методом фон Неймана розв'язок задачі (9)–(12) шукаємо у вигляді

$$\varepsilon^n_{i,j} = \sum_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty} C^{(1,s)}(n\tau) \exp\{I(ih_1k_1 + jh_2k_2)\},$$
$$\delta v^n_{i,j} = \sum_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty} C^{2,s)}(n\tau) \exp\{I(ih_1k_1 + jh_2k_2)\}, \qquad (14)$$

де

$$C^{(l,s)}_{i,j}(n\tau) = B^{(l)}_{k_1,k_2}(\xi^l_s(k_1,k_2))^n, \qquad (s,l = 1,2),$$
$$B^{(1)}_{k_1,k_2} = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\varepsilon}(x,y)\exp\{-I(xk_1 + yk_2)\}\,dx\,dy,$$
$$B^{(2)}_{k_1,k_2} = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(x,y)\exp\{-I(xk_1 + yk_2)\}\,dx\,dy,$$

індекс l вказує на належність до функції $\varepsilon^n_{i,j}$, $(l = 1)$, чи $\delta v^n_{i,j}$, $(l = 2)$, а s на належність точки сітки (x_i, y_i) до $\Omega^{(1,n)}_h$, $(s = 1)$, або до $\Omega^{(2,n)}_h$, $(s = 2)$.

При переході з шару $2n$ на шар $2n+1$ за явною схемою, гармоніки $\hat{\varepsilon}^n_{i,j}$ і $\hat{\delta v}^n_{i,j}$ похибок подаємо у вигляді

$$\hat{\varepsilon}^n_{i,j} = B^{(1)}_{k_1,k_2}(\xi^1_1(k_1,k_2)\exp\{I(ih_1k_1 + jh_2k_2)\})^n,$$
$$\hat{\delta}^n_{i,j} = B^{(2)}_{k_1,k_2}(\xi^2_1(k_1,k_2)\exp\{I(ih_1k_1 + jh_2k_2)\})^n.$$

а при переході з $2n+1$ кроку на $2n+2$ за неявною схемою, як

$$\check{\varepsilon}^n_{i,j} = B^{(1)}_{k_1,k_2}(\xi^1_2(k_1,k_2)\exp\{I(ih_1k_1 + jh_2k_2)\})^n,$$
$$\check{\delta}^n_{i,j} = B^{(2)}_{k_1,k_2}(\xi^2_2(k_1,k_2)\exp\{I(ih_1k_1 + jh_2k_2)\})^n.$$

Підставляючи значення гармонік в (9)–(12), одержимо

$$(\xi^1_1(k_1,k_2))^{2n+1} = (\xi^1_1(k_1,k_2))^{2n}(1 - B + IA_1) + A_1I(\xi^2_1(k_1,k_2))^{2n};$$
$$(\xi^1_2(k_1,k_2))^{2n+1} = (\xi^1_2(k_1,k_2))^{2n}(1 - B + 2IA_1);$$
$$(\xi^2_1(k_1,k_2))^{2n+2} = \frac{(\xi^2_1(k_1,k_2))^{2n+1}}{1 - B + 2IA_1} + \frac{A_1I}{1 - B + 2IA_1}(\xi^2_2(k_1,k_2))^{2n+2};$$

$$(\xi_2^2(k_1,k_2))^{2n+2}=\frac{(\xi_2^2(k_1,k_2))^{2n+1}}{1+B-2IA_1};\quad A_1=\tau\frac{\nu_{i,j+1}^{2n+1}-\nu_{i,j-1}^{2n+1}}{2h_2}\sin(mh_2);$$

$$B=\tau\cdot\nu_{i,j}^{2n+1}\left(\frac{1-\cos(mh_1)}{h_1^2}+\frac{1-\cos(mh_2)}{h_2^2}\right).$$

При виконанні цих умов рівняння (9)–(12) перетворюються в тотожності. Введемо вектор-стовпчик $\vec{W}_{i,j}^{n}=(\hat{\varepsilon}_{i,j}^{n},\hat{\delta}_{i,j}^{n})^T$. При переході з $2n$ на $2n+1$ крок для вектора $\vec{W}_{i,j}^{2n+1}=(\tilde{\varepsilon}_{i,j}^{2n+1},\tilde{\delta}_{i,j}^{2n+1})^T$, виконується рівність $\vec{W}_{i,j}^{2n+1}=G_1(k_1,k_2)\vec{W}_{i,j}^{2n}$, де матриця переходу з кроку $2n$ на $2n+1$

$$G_1(k_1,k_2)=\begin{vmatrix}1-B+IA_1 & A_1I\\ 0 & 1-B+2IA_1\end{vmatrix}.$$

На наступному кроці одержимо $\vec{W}_{i,j}^{2n+2}=G_2(k_1,k_2)\vec{W}_{i,j}^{2n+1}$ з матрицею переходу

$$G_2(k_1,k_2)=\begin{vmatrix}(1+B-2IA_1)^{-1} & A_1I(1+B-2IA_1)^{-1}\\ 0 & (1+B-2IA_1)^{-1}\end{vmatrix}.$$

Отже,

$$\vec{W}_{i,j}^{2n+2}=G_2(k_1,k_2)\vec{W}_{i,j}^{2n+1}=G_2(k_1,k_2)G_1(k_1,k_2)\vec{W}_{i,j}^{2n}=G(k_1,k_2)\vec{W}_{i,j}^{2n}.$$

Тут

$$G(k_1,k_2)=\begin{vmatrix}\frac{1-B+IA_1}{1+B-2IA_1} & \frac{A_1I}{1+B-2IA_1}\\ 0 & \frac{1-B+2IA_1}{1+B-2IA_1}\end{vmatrix}.$$

Так як $B\geq 0$, то модулі власних чисел матриці $G(k_1,k_2)$ менші від одиниці і для їх модулів маємо

$$|\lambda_1|=\left(\frac{(1-B)^2+(A_1)^2}{(1+B)^2+4(A_1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\leq 1,\qquad |\lambda_2|=\left(\frac{(1-B)^2+4(A_1)^2}{(1+B)^2+4(A_1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\leq 1.$$

Тобто $\|G(k_1,k_2)\|\leq 1\ \forall k_1,k_2,\tau,h_1,h_2$. Ввівши сітковий аналог норми простору

$$L_2[-\pi,\pi]\colon\ \|\varepsilon_{i,j}^n\|^2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{K}|\varepsilon_{i,j}^n|^2h_1h_2,$$

для вектора розв'язку задачі (5)–(8) одержуємо нерівність

$$\begin{aligned}\|W_{i,j}^{2n+2}\|^2&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{K}\left(|\varepsilon_{i,j}^{2n+2}|^2+|\delta_{i,j}^{2n+2}|^2\right)h_1h_2\\ &\leq q^{2n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{K}\left(|\varepsilon_{i,j}^{0}|^2+|\delta_{i,j}^{0}|^2\right)h_1h_2.\end{aligned}$$

Звідси витікає стійкість за початковими даними, а отже і збіжність за параметром часу τ.

Легко встановити, що ряди (13) збіжні і перетворюють скінченно- різницеві рівняння (9)–(12) в тотожності. Тобто, ці ряди є розв'язками задачі для похибок. $\square$

Література

1. І. І. Ляшко, О. Ю. Грищенко, М. А. Заболотний, *Чисельний розв'язок задачі проявлення прихованого зображення в термопластичних середовищах в випадку змінної в'язкості деформованного шару*, ДАН УРСР (1984), № 12, 43–45.
2. П. Роуч, *Вычислительная гидродинамика*, "Мир", Москва, 1980.
3. О. Ю. Грищенко, О. В. Ляшко, *Алгоритм розв'язування нелінійних крайових задач*, ДАН УРСР (1987), № 9, 15–18.

КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ, 252601, КИЇВ, ВОЛОДИМИРСЬКА 64

Надійшла 10.12.96