Обчислювальна та прикладна математика
Вип. 82, 1997, стор. 24–29

Computational and Applied Mathematics
No. 82, 1997, pp. 24–29

ПРО ОДИН ЧИСЕЛЬНИЙ АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

УДК 517.9

О. Ю. ГРИЩЕНКО

РЕЗЮМЕ. В роботі розроблено та обгрунтовано двокроковий явно-неявний чисельний алгоритм для розв'язування крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку в частинних похідних гіперболічного типу. Алгоритми базуються на скінченно-різницевих схемах з різницями проти потоку. Похибка апроксимації розв'язків має другий порядок за часом і перший за просторовими змінними.

Для розв'язування системи рівнянь

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} A_i(x_1, x_2, x_3) \frac{\partial \vec{U}(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i} = 0, \tag{1}$$

де $A_i(x_1, x_2, x_3)$ — задані дійсні матриці, в області $G = \{(x_1, x_2, x_3, t)|\ 0 \le x_i \le l_i, t > t_0\}$ при заданих початкових та граничних умовах застосуємо двокроковий скінченно- різницевий метод, запропонований в [1, 2] для рівнянь теплопровідності і нелінійних рівнянь переносу [3].

Не зменшуючи загальності, а лише з метою спрощення викладок, роботу алгоритма проілюструємо спочатку на прикладі одного скалярного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -k \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{2}$$

Область зміни неперервних аргументів покриваємо сітковою областю $\Omega_{h,\tau} = \{(x_i, t_n)|x_i = ih;\ t_n = n\tau;\ i = \overline{0,m};\ n = 0, 1, 2, \ldots;\ h = l/K\}$. Введемо простір сіткових функцій $H_{h,\tau}$, так що $f_i^n = f(x_i, t_n) \in H_{h,\tau}$, а скалярний добуток і норма є сітковим аналогом скалярного добутку і норми в $L_2[a, b]$. Сіткову область розщіплюємо на дві $\Omega_h^{(1,n)} = \{(x_i, t_n)|x_i = ih,\ t_n = n\tau,\ i = \overline{0,K},\ n = 0, 1, 2, \ldots, i + n$ — непарне$\}$ і $\Omega_h^{(2,n)} = \{(x_i, t_n)|x_i = ih,\ t_n = n\tau,\ i = \overline{0,K},\ n = 0, 1, 2, \ldots, i + n$ — парне$\}$, $h = l/K$. Розглянемо реалізацію цього алгоритму на основі різницевих схем з односторонніми різницями за часом і центральними різницями по просторовим змінним. Точкам підобласті $\Omega_h^{(1,n)}$ поставимо у відповідність явні різницеві рівняння з різницями вперед

$$u_i^{2n+1} = u_i^{2n} - k\tau(u_{i+1}^{2n} - u_i^{2n})/h, \tag{3}$$

а точкам області $\Omega_h^{(2,n)}$ — неявні різницеві рівняння

$$u_i^{2n+1} = u_i^{2n} - k\tau(u_{i+1}^{2n+1} - u_i^{2n+1}/h. \tag{4}$$

Знаходження розв'язку починаємо з точок області $\Omega_h^{(1,n)}$ за скіченно-різницевою схемою (3). Для кожної точки (x_i, t_{2n}) такої, що $i+2n$ непарне, значення функції u_{i+1}^{2n+1} будуть визначені в сусідніх вузлах і формально неявні скіченно-різницеві формули (4) дають змогу знайти розв'язок явно. Збільшивши номер n на одиницю, тобто перейшовши до слідуючого кроку, змінимо і належність точок до підобластей $\Omega_h^{(1,n)}$ і $\Omega_h^{(2,n)}$. Виконавши ще один цикл розрахунків за формулами (3)–(4), одержимо значення u_i^{2n+2}, які приймаємо за розв'язок задачі на наступному часовому кроці.

Проведемо дослідження стійкості двокрокової явно-неявної скінченно-різницевої схеми (3)–(4) для рівняння (2), тобто встановимо при яких умовах, накладених на коефіцієнти різницевої схеми, вірна нерівність $\|u_i^{2n}\|_{L_{2h}} \le c\|u_i^0\|_{L_{2h}}$, де u_i^0 — початковий розподіл функцій, $\|\cdot\|_{L_{2h}}$ — дискретний аналог норми в просторі L_2, c — стала, рівномірно обмежена на $t_0 \le t \le T$ і незалежна від h, τ і u_i^0.

Теорема 1. *Якщо функція $u(x,0) = \phi(x)$ подається у вигляді абсолютно збіжного ряду Фур'є, для сіткової функції u_i^0 існує розвинення*

$$u_i^0 = \phi(ih) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} B_{k_1} \exp\{Iihk_1\}$$

і крок сітки за часом сталий або змінюється через парне число кроків, то при $k<0$ двокрокова схема (3)–(4) абсолютно стійка за початковими умовами.

Доведення. Для доведення теореми використаємо метод фон-Неймана [4]. Розглянемо ряд

$$u_i^n = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} C(n\tau)\exp\{Iihk_1\}, \qquad I=\sqrt{-1}. \tag{5}$$

Якщо коефіцієнти $C(n\tau)$ визначимо так, щоб ряд (5) задовольняв скінченно-різницеві рівняння (3)–(4), граничні та початкові умови і був збіжним, то в силу єдиності розв'язку ним буде ряд (6). Параметри $C(n\tau)$ шукаємо у вигляді $C(n\tau) = B_{k_1}(\zeta(k_1))^n$, де B_{k_1} коефіцієнти розвинення функції початкового розподілу в ряд Фур'є, $\zeta(k_1)$ — коефіцієнт переходу з часосого шару $2n$ на часовий шар $(2n+2)$, який в силу двокроковості алгоритму подається у вигляді добутку $\zeta(k_1) = \zeta_1(k_1)\cdot\zeta_2(k_1)$ коефіцієнтів переходу за явною $\zeta_1(k_1)$ і неявною $\zeta_2(k_1)$ схемами. Тоді гармоніку $\tilde{u}_i^n$ ряду (5) подамо у вигляді $\tilde{u}_i^n = B_{k_1}\zeta_s(k_1)\exp\{Iihk_1\}$. При переході з кроку $2n$ на крок $(2n+1)$ за явною схемою підставимо $\tilde{u}_i^{2n}$ в (3) і після нескладних перетворень одержимо

$$\zeta_1(k_1) = 1 - k\tau h^{-1}(\exp\{Ik_1h\}-1) = 1 - k\tau h^{-1}[\cos(k_1h) + I\sin(k_1h) - 1].$$

Скориставшись схемою (4), для коефіцієнта переходу з кроку $(2n+1)$ на крок $(2n+2)$ маємо

$$\zeta_2(k_1) = [1 + k\tau h^{-1}(\cos(k_1h) + I\sin(k_1h) - 1)]^{-1}.$$

Отже множник переходу з кроку $2n$ на крок $(2n+2)$ запишемо як

$$\zeta(k_1) = \frac{1 - k\tau h^{-1}(\cos(k_1h) + I\sin(k_1h) - 1)}{1 + k\tau h^{-1}(\cos(k_1h) + I\sin(k_1h) - 1)}.$$

Умови стійкості двокрокової різницевої схеми (4)–(5) встановимо з розв'язку нерівності $|\zeta(k_1)| \le 1$. З цієї умови маємо

$$k\tau h^{-1}(1 - \cos(k_1h)) < 0 \Longrightarrow k < 0.$$

Тобто при $k < 0$ коефіцієнт зростання амплітуди довільної гармоніки менший від одиниці. Рівняння (3) і (4) перетворюються в тотожність. Так як $|\zeta(k_1)| \leq 1$ при $k < 0$, то для (5) має місце оцінка

$$\left|u_i^{2n}\right| = \left|\sum_{k_1=-\infty}^{\infty} B_{k_1}(\zeta(k_1))^{2n} \exp\{Ik_1ih\}\right| \leq \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \left|B_{k_1}\right|,$$

з якої при виконанні умови теореми випливає збіжність ряду (5) $\forall n = 1, 2, \ldots$. Отже, сіткова функція (5) є розв'язком різницевих рівнянь (3)–(4). Враховуючи, що $\left\|u_i^n\right\|^2 = \sum_{i=1}^m \left\|u_i^n\right\|^2 h$ є дискретним аналогом норми в просторі $L_2[-\pi, \pi]$, для розв'язку різницевої задачі одержимо

$$\begin{aligned}\left\|u_i^n\right\|^2 &= \sum_{i=1}^{m} \left|\sum_{k_1=-\infty}^{\infty} B_{k_1}(\zeta(k_1))^n \exp\{Ik_1ih\}\right|^2 h \\ &\leq q^{2n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \left|B_{k_1} \exp\{Ik_1ih\}\right|^2 h \\ &= q^{2n} \sum_{i=1}^{m} \left|u_i^0\right|^2 h = q^n \|u_i^0\|_{L_{2h}}.\end{aligned}$$

Тобто при $k < 0$ маємо $q = \max_{k_1} |\zeta(k_1)| \leq 1$, отже $\|u_i^n\| \leq q^{2n}\|u_i^0\|$. Ця нерівність при $k < 0$ встановлює абсолютну стійкість за початковими умовами.

Теорема доведена. □

Якщо в двокроковому явно-неявному алгоритмі схеми (3)–(4) змінимо схеми з різницями назад, а саме, в відповідність підобласті $\Omega_h^{(1,n)}$ поставимо різницеві рівняння

$$u_i^{2n+1} = u_i^{2n} - k\tau(u_i^{2n} - u_{i-1}^{2n})/h, \tag{6}$$

а точкам підобласті $\Omega_h^{(2,n)}$ — неявні різницеві рівняння

$$u_i^{2n+1} = u_i^{2n} - k\tau(u_{i+1}^{2n+1} - u_i^{2n+1})/h, \tag{7}$$

то, міркуючи аналогічно попередньому, можна довести таку теорему.

Теорема 2. *При виконанні умов теореми* 1 *двокрокова схема* (6)-(7) *абсолютно стійка за початковими умовами при* $k > 0$.

Узагальнюючи одержані результати, приходимо до висновку, що справедливе таке загальне твердження.

Теорема 3. *Для задачі* (2) *двокроковий явно-неявний алгоритм, побудований на основі схем з односторонніми різницями буде абсолютно стійкий, якщо кожна з цих схем буде схемою з різницями проти потоку.*

Вважаючи, що функція u достатньо гладка, дослідимо апроксимацію різницевої схеми. Відомо, що схеми (3) і (4) апроксимують різницеве рівняння з порядком $O(\tau + h)$. Апроксимація двокрокової схеми дещо краща.

Теорема 4. *Порядок апроксимації двокрокових різницевих схем* (3)-(4) *і* (6)-(7) *рівний* $O(\tau^2 + h)$. *Крім того, ці схеми володіють схемною штучною в'язкістю.*

Доведення. Так як точки сіткової області, взагалі кажучи, не рівноправні, то розглянемо дві можливі оцінки похибки. Спочатку розглянемо ті просторові точки, для яких проміжне значення розв'язку знаходиться за явною схемою, а безпосередньо розв'язок на слідуючому часовому шарі — за неявною. Тобто використаємо послідовно схему (3) і схему (4). Додаючи ці рівняння, маємо

$$u_i^{2n+2} = u_i^{2n} - k\tau((u_{i+1}^{2n+2} + u_{i+1}^{2n}) - (u_{i-1}^{2n+2} + u_{i-1}^{2n}))/h.$$

Це шеститочкова схема з центральними різницями за часом і односторонніми по простору. Її похибка апроксимації $O(\tau^2 + h)$. Перше диференціальне наближення цієї схеми має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial u}{\partial x} = -k\frac{h}{6}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k\left[\frac{h^2}{6} + \frac{k^2h^2 - k^2\tau^2}{2}\right]\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \cdots .$$

Як видно, похибка апроксимації містить похідні парного порядку і, отже, схема дисипативна. присутність похідних непарного порядку вказують на другий порядок дисперсивності. отже, вона має схемну в'язкість.

Для другої множини допоміжне значення знаходиться за схемою (6), а розв'язок задачі за явною схемою

$$u_i^{2n+2} = u_i^{2n+1} - k\tau(u_{i+1}^{2n+1} - u_{i-1}^{2n+1})/h. \tag{8}$$

Склавши рівняння (4) з (8), маємо

$$u_i^{2n+2} - u_i^{2n} = -k\tau[u_{i+1}^{2n+1} - u_{i-1}^{2n+1}]/h.$$

Це дає змогу зробити висновок, що схема має похибку апроксимації рівну $O(\tau^2 + h)$. Першим диференціальним наближення цього рівняння є

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial u}{\partial x} = -k\frac{h}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k\left[\frac{h^4}{6} - \frac{k^2\tau^2}{6}\right]\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \cdots .$$

Наявність похідних парних та непарних порядків в розкладі похибки апроксимації вказує на присутність в схемі штучної в'язкості.

Теорема доведена. □

Вказані скінченно-різницеві схеми зручно використовувати, коли коефіцієнт рівняння k сталий або не змінює знак. Якщо ж він знакозмінний, то двокроковий алгоритм доцільно будувати спираючись на схему з донорними комірками [5]. В оригінальному записі вона має вигляд

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \frac{k_R^n u_R^n - k_L^n u_L^n}{h}, \tag{10}$$

де

$$u_R^n = \begin{cases} u_i^n & \text{при } k_R^n > 0 \\ u_{i+1}^n & \text{при } k_R^n < 0, \end{cases} \qquad u_L^n = \begin{cases} u_{i-1}^n & \text{при } k_L^n > 0 \\ u_i^n & \text{при } k_L^n < 0, \end{cases}$$

$$k_R^n = 1/2(k_{i+1}^n + k_i^n), \qquad k_L^n = 1/2(k_i^n + k_{i-1}^n).$$

Легко перевірити, що ця схема є консервативною і транспортивною, має перший порядок апроксимації.

Нехай функція $k(x,t)$ змінює знак в точці $x = \xi$. Використаємо введені раніше сіткові підобласті. На непарних часових кроках в точках першої з них розв'язок шукаємо за явною формулою

$$\frac{u_i^{2n+1} - u_i^{2n}}{\tau} = -\frac{k_R^{2n+1} u_R^{2n} - k_L^{2n+1} u_L^{2n}}{h}, \tag{11}$$

а в точках другої — за неявною

$$\frac{u_i^{2n+1}-u_i^{2n}}{\tau}=-\frac{k_R^{2n+1}u_R^{2n+1}-k_L^{2n+1}u_L^{2n+1}}{h}, \tag{12}$$

На парних часових кроках ці формули подаємо у вигляді

$$\frac{u_i^{2n+2}-u_i^{2n+1}}{\tau}=-\frac{k_R^{2n+1}u_R^{2n+1}-k_L^{2n+1}u_L^{2n+1}}{h}, \tag{13}$$

і

$$\frac{u_i^{2n+2}-u_i^{2n+1}}{\tau}=-\frac{k_R^{2n+1}u_R^{2n+2}-k_L^{2n+1}u_L^{2n+2}}{h}, \tag{14}$$

Теорема 5. *Якщо точка зміни знаку $k(x,t)$ співпадає з одним з вузлів сітки, а крок сітки за часом сталий або змінюється через парне число кроків, то двокроковий алгоритм, побудований з використанням схем* (11)–(14), *стійкий за початковими даними і має похибку апроксимації* $O(\tau^2+h)$.

Доведення. Нехай, для визначеності, точка сітки $x_i=\xi$ і $k(x,t)>0$ при $x_i<\xi$; $k(\xi,t)=0$; $k(x,t)<0$ при $x_i>\xi$. Тоді $\forall i=\overline{1,l-1}$ з непарного кроку схеми (11)–(14) приймуть вигляд:

для точок з $\Omega_h^{(1,n)}$
$$\frac{u_i^{2n+1}-u_i^{2n}}{\tau}=-\frac{k_R^{2n+1}u_i^{2n}-k_L^{2n+1}u_{i-1}^{2n}}{h}, \tag{15}$$

а для точок з $\Omega_h^{(2,n)}$
$$\frac{u_i^{2n+1}-u_i^{2n}}{\tau}=-\frac{k_R^{2n+1}u_i^{2n+1}-k_L^{2n+1}u_{i-1}^{2n+1}}{h}. \tag{16}$$

На парних кроках вони запишуться так:

для точок з $\Omega_h^{(1,n)}$
$$\frac{u_i^{2n+2}-u_i^{2n+1}}{\tau}=-\frac{k_R^{2n+1}u_i^{2n+1}-k_L^{2n+1}u_{i-1}^{2n+1}}{h}, \tag{17}$$

і для точок з $\Omega_h^{(2,n)}$
$$\frac{u_i^{2n+2}-u_i^{2n+1}}{\tau}=-\frac{k_R^{2n+1}u_i^{2n+2}-k_L^{2n+1}u_{i-1}^{2n+2}}{h}. \tag{18}$$

На двох кроках цей алгоритм дає розв'язок задачі, який реалізується схемою

$$\frac{u_i^{2n+2}-u_i^{2n}}{2\tau}=-\frac{k_R^{2n+1}(u_i^{2n+2}+u_i^{2n})2^{-1}-k_L^{2n+1}(u_{i-1}^{2n+2}+u_{i-1}^{2n})2^{-1}}{h}$$

або

$$\frac{u_i^{2n+2}-u_i^{2n}}{2\tau}=-\frac{k_R^{2n+1}u_i^{2n+1}-k_L^{2n+1}u_{i-1}^{2n+1}}{h},$$

які при достатній гладкості розв'язку мають похибку апроксимації $O(\tau^2+h)$. Отже, на цьому проміжку виконуються умови теореми 2.

Як легко встановити, на проміжку $x_i>\xi$ $\forall i=\overline{l+1,M}$ для відповідних схем будуть виконуватись умови теореми 1.

В точці $x_i=x_1=\xi$ значення шуканої функції знаходимемо за аналогічними схемами, але з використанням центральних різниць за просторовою змінною. На непарних кроках:

для точок з $\Omega_h^{(1,n)}$
$$\frac{u_i^{2n+1}-u_i^{2n}}{\tau}=-\frac{k_{l+1}^{2n+1}u_{l+1}^{2n}-k_{l-1}^{2n+1}u_{l-1}^{2n}}{h}, \tag{19}$$

а для точок з $\Omega_h^{(2,n)}$
$$\frac{u_l^{2n+1}-u_l^{2n}}{\tau}=-\frac{k_{l+1}^{2n+1}u_{l+1}^{2n+1}-k_{l-1}^{2n+1}u_{l-1}^{2n+1}}{h}. \tag{20}$$

На парних кроках вони запишуться так:

$$\text{для точок з } \Omega_h^{(1,n)} \quad \frac{u_l^{2n+2}-u_l^{2n+1}}{\tau} = -\frac{k_{l+1}^{2n+1}u_{l+1}^{2n+1} - k_{l-1}^{2n+1}u_{l-1}^{2n+1}}{h}, \tag{21}$$

$$\text{і для точок з } \Omega_h^{(2,n)} \quad \frac{u_l^{2n+2}-u_l^{2n+1}}{\tau} = -\frac{k_{l+1}^{2n+1}u_{l+1}^{2n+2} - k_{l-1}^{2n+1}u_{l-1}^{2n+2}}{h}. \tag{22}$$

Встановлення стійкості для двокрокового алгоритму, побудованого на основі цих скінченно-різницевих схем, проводиться аналогічно.

Теорема доведена. □

Якщо точка зміни знаку $k(x,t)$ не співпадає з точкою сіткової множини, то в точці зміни знаку використовувати схему з донорними комірками неправомірно, бо вона не апроксимує рівняння. Дійсно, якщо $k_l^n > 0$, $k_{l+1}^n < 0$, а $(k_{l+1}^n + k_l^n) < 0$, то після нескладних перетворень схеми (10) маємо скінченно-різницеве рівняння

$$\frac{u_l^{2n+2}-u_l^{2n+1}}{\tau} = -\frac{(k_{l+1}^{2n+1}+k_l^{2n+1})u_{l+1}^{2n+1} - (k_l^{2n+1}+k_{l-1}^{2n+1})u_{l-1}^{2n+1}}{2h}$$

$$= -\frac{1}{2h}\left[k_{l+1}^{2n+1}u_{l+1}^{2n+1} - k_{l-1}^{2n+1}u_{l-1}^{2n+1}\right] - \frac{k_l^{2n+1}}{2h}\left[u_{l+1}^{2n+1} - u_{l-1}^{2n+1}\right],$$

яке апроксимує дещо інше диференціальне рівняння. В цьому випадку замість схеми з донорними комірками доцільно використовувати схему з центральними різницями за просторовими змінними.

Розглянуті алгоритми, володіючи властивостями абсолютної стійкості нарівні з неявними схемами, дають змогу проводити обчислення розв'язку з затратами рівноцінними явним схемам. Затрати на перевірку знаку $k(x,t)$ в алгоритмі з схемою з донорними комірками повністю компенсується необхідністю обчислення значень цього коефіцієнту тільки в точках непарних часових кроків. Наявність схемної в'язкості в наведених алгоритмах дає змогу ефективно застосувати їх для розв'язування задач газової динаміки нев'язких потоків.

Так в одновимірному випадку, коли коефіцієнти матриці $A_1(x_1,x_2,x_3)$ векторного рівняння (1) знакосталі, доцільно застосувати алгоритм, побудований на основі першої чи другої схеми з різницями проти потоку. Якщо ж коефіцієнти матриці знакозмінні, то більш ефективним є алгоритм, який реалізується на базі схем з донорними комірками. Наведений алгоритм досить просто розповсюджується на багатовимірні випадки.

Література

1. A. R. Gourlay, *Hopscjthe a fast second-oder partical differential equation solver*, J. Inst. Math. Appl **6** (1970), 375–390.
2. О. Ю. Грищенко, *Про один алгоритм чисельного дослідження процесу візуалізації в рельєфографії*, Обчислювальна і прикладна матем., № 80, Київ, 37–44.
3. О. Ю. Грищенко, *Дослідження одного чисельного алгоритму нелінійної моделі переносу*, Обчислювальна і прикладна матем., № 80, Київ, 84–92.
4. Р. Рихтмайер, К. Мортон, *Разностные методы решения краевых задач*, "Мир", Москва, 1972.
5. П. Роуч, *Вычислительная гидродинамика*, "Мир", Москва, 1980.

КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ, 252601, КИЇВ, ВОЛОДИМИРСЬКА 64

Надійшла 28.07.97