

## УСОВЕРШЕНСТВОВАННЫЙ МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ВИХРЕЙ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ

УДК 533.011.001.57:518.12.004.69

С. А. ДОВГИЙ И А. В. ШЕХОВЦОВ

**РЕЗЮМЕ.** Метод дискретных вихрей усовершенствован для моделирования нелинейных высоконестационарных процессов, возникающих при взаимодействии тел, находящихся в неустановившемся движении вблизи твердых границ, с крупномасштабными вихревыми структурами. Показано, что соблюдение условия вмороженности вихревых образований в среду приводит к исключению произволов метода дискретных вихрей — расчетного временного шага, радиуса сингулярности и радиуса буферной зоны.

Для ансамбля дискретных вихрей, моделирующих поверхность тангенциального разрыва скорости, предложен экономичный метод решения задачи Коши, уменьшающий ошибки дискретизации, связанные с заменой этой поверхности системой дискретных вихрей.

Апробация УМДВ была проведена на нестационарной нелинейной задаче о негармонических угловых колебаниях крыла в покоящейся среде вблизи твердой поверхности при отсутствии щели между крылом и поверхностью.

При помощи УМДВ впервые удалось получить сходящееся в вычислительном смысле решение для задачи отмеченного типа. Сравнение полученных результатов с известными экспериментальными данными дало хорошее соответствие.

Существует довольно обширный круг практически важных задач динамики жидкости, для которых не удастся получить удовлетворительного решения традиционными вычислительными методами (конечно-разностными, интегральными или спектральными). Эти методы основаны на эйлеровом подходе и для решения нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений используют специальные математические приближения и допущения. Это вызывает искажение нелинейных связей и может привести к некорректной вычислительной модели и неустойчивому вычислительному процессу.

Напротив, вихревые методы, основанные на лагранжевом или эйлерово–лагранжевом подходе, обладают независимостью от сетки и лучшей пригодностью для нестационарных течений с большими градиентами расчетных величин, но за свою элегантность они заплатили необходимостью иметь дело с бесконечно тонкой вихревой пеленой (поверхностью разрыва скорости) или дискретными вихревыми образованиями вместо реального сдвигового слоя конечной толщины. И вихревая поверхность, и дискретные образования при расчетах являются источниками сингулярности, что приводит к необходимости применять различные способы регуляризации. Достаточно полный обзор вычислительных методов вихрей дан в работе Сарпкайя [1].

Наиболее ярким представителем вихревых методов является метод дискретных вихрей (МДВ). Основные идеи, лежащие в его основе, были высказаны еще Гельмгольцем в середине прошлого столетия и Н. Е. Жуковским — в начале нынешнего.

Суть идеи Гельмгольца состоит в представлении всей области вихревого течения двумя типами подобластей: одним, в котором завихренность присутствует, и другим — где ее настолько мало, что ею можно пренебречь. Такая схематизация позволила рассматривать движение локальных вихревых образований в потенциальной среде, которые в случае ее идеальности, баротропности и потенциальности внешних массовых сил приобретают удивительное свойство замороженности в среду. Гельмгольцем было показано, что с некоторой степенью точности эти вихревые образования можно моделировать дискретными вихревыми линиями с подходящей циркуляцией.

Следующим важным шагом стала идея Н. Е. Жуковского о том, что безотрывное обтекание профиля крыла потоком вязкой жидкости можно схематизировать при помощи понятия “жидкого крыла”, внутри которого циркулирует присоединенный вихрь, а также нового типа потенциального течения с неоднозначным потенциалом для случая многосвязного пространства. Это, в совокупности с постулатом Кутта–Жуковского–Чаплыгина о конечности скорости в угловой точке на задней кромке профиля, дало возможность рассчитывать главный вектор внешних сил давления потока на крыло, причем в полном соответствии со знаменитым парадоксом Даламбера.

Розенхед [2] в 1931г. впервые исследовал двумерную модель бесконечно тонкой вихревой поверхности, заменяя ее системой вихревых нитей. Проведенные расчеты показали, что вихревая пелена со временем начинает сворачиваться. Обоснование корректности такого моделирования для случая обтекания тонкого криволинейного профиля стационарным потоком несжимаемой жидкости было осуществлено М. А. Лаврентьевым в том же году [3]. Спустя двадцать с лишним лет С. М. Белоцерковский творчески развил данный подход, распространив его на пространственный случай [4, 5]. Универсальность, сравнительная простота, приемлемая точность и экономичность МДВ при реализации его на компьютере привели к тому, что он прочно занял место лидера, постоянно развиваясь и совершенствуясь.

В настоящее время МДВ применяется в гидроаэродинамике, теории упругости, теории пластичности, электродинамике, однако более всего он оказался эффективен в гидроаэродинамике крыла [6].

В случае гидроаэродинамических задач суть МДВ заключается в замене непрерывных вихревых поверхностей, моделирующих движущееся тело и след за ним, системой дискретных вихрей, для которых должно выполняться условие гидродинамической замкнутости. При этом предполагается, что среда вне вихрей является потенциальной, идеальной и баротропной (чаще всего — несжимаемой) с однозначным потенциалом внешних массовых сил (например, невесомой). Выполнение граничных условий в контрольных точках совместно с постулатом Кутта–Жуковского–Чаплыгина приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных циркуляций дискретных вихрей, моделирующих поверхность тела. В случае многосвязного пространства указанную систему может замыкать уравнение, выражающее собой динамическую теорему Кельвина. Для определения положения сошедших свободных вихрей в каждый расчетный момент времени производится интегрирование уравнений движения, которые получены из условия движения свободных вихрей вне тела по траекториям жидких частиц. Поле скорости, индуцируемое дискретными вихрями, находится при помощи формулы Био–Савара, а поле давлений и нагрузки на теле — при помощи интеграла Коши–Лагранжа.

При малых скоростях движения тел, когда среду можно считать несжимаемой, потенциал возмущенной скорости удовлетворяет линейному уравнению Лапласа, а при больших, когда сжимаемостью пренебречь нельзя, — нелинейному волновому уравнению. В последнем случае возникают два усложнения: нельзя в обычном виде строить решение методом суперпозиций — становится несправедлив аддитивный закон Био–Савара и, кроме этого, необходимо учитывать конечность скорости распространения возмущений. В линейных задачах она полагается равной скорости звука в невозмущенной среде, в нелинейных — местной скорости звука.

В силу того, что поле скорости, индуцированное дискретным вихрем, подчиняется закону дальнего действия, при программной реализации дискретный вихрь оказался удобным математическим модулем, обеспечивающим хорошую обусловленность определителей систем алгебраических уравнений, а, следовательно, и устойчивость вычислительного процесса.

В простейших случаях МДВ можно трактовать как численный метод решения сингулярных интегральных уравнений (СИУ), а в общем случае, когда вид СИУ неизвестен — как метод численного моделирования определенных типов реальных процессов в сплошных средах, относительно которых предполагается, что их можно описать при помощи СИУ.

Как известно, СИУ и их решения устойчивы в метрике  $L_2$ , однако не всегда устойчивы в равномерной метрике [6]. В работах [6, 7, 8, 9] доказано, что МДВ является методом саморегуляризации, которая осуществляется за счет использования двух сеток, специальным образом расположенных относительно друг друга на границе рассматриваемой области. Исходя из общих свойств СИУ, можно сформулировать основное требование по их размещению. Действительно, самоиндуцированные скорости от непрерывной вихревой поверхности можно выразить через интегралы типа Коши, сходящиеся в смысле главного значения, а скорости, индуцированные дискретными вихрями в точках, принадлежащих той же поверхности, что и сами вихри, — через алгебраические суммы. Поэтому взаимное расположение вихрей и точек должно быть таким, чтобы при бесконечном увеличении их числа обеспечивалась сходимость сумм к интегралам типа Коши.

Здесь важно подчеркнуть, что точность аппроксимации суммарного вихревого слоя системой дискретных вихрей зависит только от взаимного расположения указанных двух сеток. Встречающееся в публикациях мнение (например, [10–13]) о том, что, управляя общим сдвигом системы двух сеток в пределах меры дискретности, можно регулировать локальной погрешностью аппроксимации, неверно, так как такой сдвиг эквивалентен смещению всего тела, а, следовательно, и точного решения.

И. К. Лифановым и Я. Е. Полонским доказано, что равномерное размещение дискретных вихрей на отрезке и точек посередине между вихрями (схема Белоцерковского) обеспечивает равномерную сходимость по норме  $L_2$  в указанном выше смысле на любом фиксированном интервале внутри отрезка интегрирования [14, 15]. Еще одна особенность МДВ — необходимый класс решения (относительно поведения функции на концах отрезка интегрирования) выделяется автоматически: если ближе к острой кромке расположить расчетную точку, то скорости в ее окрестности будут ограничены, т.е., на этой кромке будет выполняться постулат Кутта–Жуковского–Чаплыгина (“Б–условие” МДВ [4, 5, 8]). Л. Н. Полтавским показано, что выполнение данного постулата эквивалентно обращению в нуль интенсивности присоединенного вихревого слоя на соответствующих острых кромках тела [16]. Это обстоятельство сняло проблему размещения сходящего с кромки свободного дискретного вихря — его необходимо помещать на самой кромке, а интенсивность

находить вместе с суммарными дискретными вихрями в процессе решения системы линейных алгебраических уравнений.

Помимо выделения необходимого класса решения, немаловажным также является правильное описание характера обращения в бесконечность решения в окрестности острых кромок тела. В классическом МДВ [5] провозглашалось игнорирование учета поведения решения вблизи острых кромок тел в пределах выбранного класса. Это отчасти было оправдано тем, что расчет суммарных стационарных аэродинамических характеристик крыльев по схеме Белоцерковского давал точные значения при любом числе суммарных вихрей, моделирующих крыло. Вместе с тем, он давал неустранимую погрешность на концах интервала [17, 18, 19], что являлось причиной того, что локальные характеристики, например подсосывающая сила, описывались грубо, что не позволяло использовать классический МДВ для исследования нелинейных эффектов в теории крыла-двигателя.

Указанная трудность была преодолена в 1971 г., Д. Н. Гореловым и Р. Л. Куляевым было показано, что существует бесконечное семейство пар сеток дискретных вихрей и контрольных точек на базе равномерного разбиения крыла на сегменты, которые дают равномерное приближение интенсивностей дискретных вихрей к точному распределению плотности вихревого слоя на всем отрезке, включая его концы, при сингулярном характере поведения решения в конечном числе точек, а также показано, как такие неравномерные сетки необходимо строить [17, 18].

В последующем такой способ построения неравномерных сеток в МДВ был назван локальной аппроксимацией вихревого слоя и были доказаны теоремы о равномерной сходимости МДВ, основанного на этой аппроксимации для всего рассматриваемого промежутка [18, 19].

В силу исключительной важности таких схем, приведем одну из них, соответствующую наиболее типичному случаю, когда вблизи одного конца тонкого прямолинейного крыла бесконечного размаха вихревая интенсивность  $\gamma$  стремится к нулю как  $\sqrt{x}$ , а вблизи другого — к бесконечности как  $1/\sqrt{x}$ , где  $x$  — расстояние от текущей точки на крыле до соответствующей кромки крыла.

Следуя работе [18], расположим крыло единичной длины вдоль оси  $OX$ , совместив кромку  $B_2$  с неограниченным поведением  $\gamma$  с началом СК, а кромку  $B_1$  — с точкой  $(1; 0)$ .

Тогда вихревая интенсивность представима в виде

$$\gamma(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \phi(x),$$

где  $\phi(x)$  удовлетворяет условию Гельдера с показателем  $\alpha$ ,  $0.5 < \alpha \leq 1$  для  $x \in [0, 1]$ .

Разобьем отрезок  $[0, 1]$  точками  $c_0 = 0, c_1, \dots, c_N = 1$  на  $N$  сегментов равной длины  $c_m - c_{m-1} = 1/N, m = 1, \dots, N$ .

Введем семейство двух сеток  $x_1, \dots, x_N$  (координаты суммарных дискретных вихрей) и  $x_{01}, \dots, x_{0N}$  (координаты контрольных точек) такое, что

$$x_m \in [c_{m-1}, c_m], \quad m = 1, \dots, N;$$

$$x_{0k} \in (c_{k-1}, c_{k+1}), \quad k = 1, \dots, N-1, \quad x_{0N} \in (c_{N-1}, c_N].$$

Тогда, задавая координаты суммарных дискретных вихрей в виде

$$x_m = (m-1 + \mu)/N, \quad m = 1, \dots, N, \quad (1)$$

координаты контрольных точек необходимо вычислять по формуле

$$x_{0k} = (k-1 + \nu_k(0) + \mu)/N, \quad k = 1, \dots, N, \quad (2)$$

Таблица 1

$k$	1	2	3	4	5	...	$N - 1$	$N$
$\nu_k(0)$	0.55	0.52	0.51	0.51	0.5	...	0.5	0.38

где  $\mu = \text{const}$ , а  $\nu_k(0)$ , округленные до двух десятичных знаков, представлены в таблице 1.

Отметим, что неравномерность в размещении контрольной точки, ближней к кромке отрыва потока  $B_1$ , должна существовать лишь на небольшом начальном промежутке времени, после чего характер поведения  $\gamma(x)$  в окрестности  $B_1$  меняется и там нужно применять равномерное размещение контрольных точек.

Вопросам математического обоснования МДВ посвящены работы М. А. Лаврентьева [3], Джона [20], В. Ф. Молчанова [21], В. Г. Мишкевича [22], И. К. Лифанова [6–8, 14, 15, 23–26], Я. Е. Полонского [14], Л. Н. Полтавского [16], В. Э. Сарэна [27], Д. Н. Горелова [18, 19], М. Т. Барина [28], Н. Ф. Воробьева [10].

МДВ хорошо зарекомендовал себя в нестационарной аэродинамике крыла, однако в ряде случаев, когда происходит внезапная перестройка течения, либо имеется активное взаимодействие подвижных границ с сошедшей вихревой пеленой, он не дает удовлетворительного и устойчивого решения [1]. Наличие сингулярностей, а также погрешности дискретизации по пространству и времени приводят к ошибкам в интегрировании уравнений движения свободных вихрей, что является причиной проникновения вихрей через твердые границы и самопересечения вихревой пелены.

Во избежание указанных трудностей было изобретено множество способов регуляризации, сглаживания а также манипуляций со свободными вихрями (редискретизация, группирование и т.д.) [1]. Однако эти приемы не всегда физичны и вносят дополнительные свободные параметры (произволы), но главное, они не обеспечивают устойчивости и сходимости получаемого решения.

Выйти из этого порочного круга можно, если учесть, что МДВ стоит обособленно от других методов. Им не решаются непосредственно уравнения движения жидкости, а осуществляется прямое моделирование процесса зарождения, структурирования и конвективной дисперсии завихренности с использованием самых фундаментальных свойств идеальной баротропной среды, находящейся в поле консервативных сил. С одной стороны, это является достоинством, так как изначально не закладываются гипотезы, лежащие в основе уравнений Навье–Стокса, но с другой, обязывает исследователя контролировать выполнение тех динамических теорем, которые явным образом не использовались при построении вычислительной математической модели, являясь следствием других, более фундаментальных.

Особенность предлагаемого ниже усовершенствованного метода дискретных вихрей (УМДВ) состоит в том, что он обеспечивает получение сходящегося в вычислительном смысле решения для задач с любой степенью нестационарности, причем при этом не вводится ни один дополнительный параметр, а точность получаемых результатов зависит лишь от меры дискретности задачи.

Основополагающим принципом корректного моделирования должно быть исключение всяческих произволов с целью максимального приближения вихревых траекторий к траекториям движения жидких частиц (аналог “бритвы Окамма” в гидродинамике). Назовем его “О-принципом”. Фактически, этот принцип является ни чем иным, как требованием соблюдения условия вмерзлости вихревых образований в среду.

Наибольшее влияние на результаты расчетов оказывает произвол в выборе шага по времени и его неизменность, в то время, как моделируемые процессы могут быть высоконестационарные. Избавимся от этого произвола.

Для упрощения рассуждений рассмотрим случай безотрывного (на кромке натекания нет отрыва) обтекания тонкого плоского непроницаемого крыла  $S$  бесконечного размаха. Разобьем крыло с длиной хорды  $L$  на  $N$  сегментов  $[c_{m-1}, c_m]$  так, чтобы соответствующие отрезки (в данном случае они совпадают с сегментами) были одинаковой длины  $\Delta l_S = L/N$ . Заменяем крыло вихревым слоем с интенсивностью  $\gamma(l_S, t)$ . Тогда циркуляция скорости вдоль каждого сегмента будет равна интегралу от интенсивности вихревого слоя сегмента:

$$\Gamma_{S_m}(t) = \int_{c_{m-1}}^{c_m} \gamma(l_S, t) dl_S, \quad m = 1, \dots, N. \quad (3)$$

Построим дискретную модель. Непрерывный вихревой слой на каждом сегменте заменим одним суммарным дискретным вихрем, который расположим в его начале (что соответствует случаю  $\mu = 0$  в формулах (1) и (2)). При этом первый вихрь будет находиться на кромке натекания потока, а задняя кромка крыла  $B_1$  — совпадать с точкой  $c_N$ . Непрерывные процессы заменим ступенчатыми, предполагая, что в промежутках между соседними дискретными моментами времени  $t^{(n)}$  и  $t^{(n+1)}$  время и все характеристики не изменяются и равны своим значениям в начале промежутка. Тогда, полагая  $\gamma(l_S, t)$  постоянной на каждом сегменте, вместо (3) получим его дискретный аналог:

$$\Gamma_{S_m}^{(p)} = \frac{\gamma_{S_m}^{(p)} L}{N}, \quad m = 1, \dots, N, \quad p = 1, \dots, n,$$

где  $\gamma_{S_m}^{(p)}$  — погонная вихревая интенсивность  $m$ -го сегмента крыла на  $p$ -том шаге по времени.

В соответствии с [16], для выполнения постулата Кутта–Жуковского–Чаплыгина, на задней кромке крыла  $B_1$  должен располагаться зарождающийся свободный вихрь  $\Gamma_{S_{N+1}}^{(n)}$ , который со временем сойдет в поток. Т. е., в каждый последующий расчетный момент времени  $t^{(n+1)}$  за крылом будет возникать свободный дискретный вихрь с циркуляцией  $\Gamma_{\sigma_{n+1}}^{(n+1)} = \Gamma_{S_{N+1}}^{(n)}$ . При этом текущий шаг по времени  $\Delta t^{(n)} = t^{(n+1)} - t^{(n)}$  должен быть таким, чтобы свободная завихренность, сосредоточенная в окрестности задней кромки, полностью сошла в поток, а на ее место переместилась свободная завихренность с последнего участка крыла, т. е., сосредоточенная в суммарном вихре  $\Gamma_{S_N}^{(n)}$ . Поэтому будут справедливы следующие равенства:

$$\frac{\Gamma_{S_{N+1}}^{(n+1)}}{\tilde{\gamma}_{S_N}^{(n)}} = \frac{L}{N} = \frac{\Gamma_{\sigma_{n+1}}^{(n+1)}}{\tilde{\gamma}_{S_{N+1}}^{(n)}}, \quad (4)$$

где  $\tilde{\gamma}_{S_N}^{(n)}$  и  $\tilde{\gamma}_{S_{N+1}}^{(n)}$  — свободные компоненты суммарных погонных вихревых интенсивностей  $\gamma_{S_N}^{(n)}$  и  $\gamma_{S_{N+1}}^{(n)}$ , соответственно.

Здесь и далее нижние индексы при  $\Gamma_\sigma, \gamma_\sigma, W_\sigma$  и  $l_\sigma$  — номера сегментов вихревой пелены  $\sigma$  (а, следовательно, и свободных дискретных вихрей), соответствующие номерам расчетных моментов времени, при которых вихри сходили в поток.

Запишем теперь выражение для циркуляции скорости вдоль сегмента свободной вихревой пелены, который сошел в поток за время  $t^{**} - t^* = \Delta t$ . В непрерывном

виде имеем:

$$\Gamma_{\sigma}(t^{**}, t^*) = \int_{t^*}^{t^{**}} \gamma(\ell_{\sigma}(t, t^*)) d\ell_{\sigma}(t, t^*),$$

где  $\gamma(\ell_{\sigma}(t, t^*))$  — интенсивность свободной вихревой пелены  $\sigma$  в момент времени  $t$  в точке, которая сошла с крыла в момент времени  $t^* \leq t$ , а  $\ell_{\sigma}(t, t^*)$  — криволинейная координата в момент времени  $t$ , равная длине дуги от задней кромки крыла  $B_1$  до точки на вихревой пелене  $\sigma$ , которая сошла с крыла в момент времени  $t^* \leq t$ .

Найдем дифференциал функции  $\ell_{\sigma}(t, t^*)$ :

$$d\ell_{\sigma}(t, t^*) = \frac{d}{dt}(\ell_{\sigma}(t, t^*))dt = W_{\sigma}(t, t^*) dt,$$

где  $W_{\sigma}(t, t^*)$  — величина скорости движения свободной вихревой пелены  $\sigma$  в момент времени  $t$  в точке, которая сошла с крыла в момент времени  $t^* \leq t$ .

Тогда для сегмента свободной вихревой пелены, который сойдет в поток за последующий промежуток времени  $t^{n+1} - t^n = \Delta t^n$ , имеем:

$$\Gamma_{\sigma}(t^{n+1}, t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \gamma(\ell_{\sigma}(t, t^n)) W_{\sigma}(t, t^n) dt. \quad (5)$$

Перейдем к дискретному аналогу выражения (5), учитывая при этом, что скорости и интенсивности точек свободной вихревой пелены в пределах расчетного интервала времени  $[t^{(n)}, t^{(n+1)})$  постоянные и равны своим значениям в начале интервала (для рассматриваемого сегмента это момент схода пелены с задней кромки  $B_1$  крыла  $S$ ):

$$\Gamma_{\sigma n+1}^{(n+1)} = \tilde{\gamma}_{SN+1}^{(n)} W_{B_1}^{(n)} \Delta t^{(n)},$$

где  $W_{B_1}^{(n)}$  — величина скорости в окрестности задней кромки крыла в расчетный момент времени  $t^{(n)}$ .

Откуда, с учетом правого равенства (4), для шага по времени будем иметь:

$$\Delta t^{(n)} = \frac{L}{W_{B_1}^{(n)} N}. \quad (6)$$

При этом каждый сходящий вихрь будет проходить расстояние, равное  $\Delta \ell$ , а шаги по времени в общем случае будут переменные. Тем самым исключается второй произвол МДВ. Автоматическое подстраивание временного шага по формуле (6) позволяет адекватно описывать любые нестационарные процессы, а увеличение числа суммарных вихрей  $N$  будет приводить к повышению точности моделирования.

Интересно отметить, что в работе [17] использовался переменный шаг по времени, однако вместо скорости  $W_{B_1}^{(n)}$  ошибочно бралась ее касательная компонента, что справедливо лишь для линейных задач.

Следуя “О-принципу”, освободимся от второго произвола МДВ — радиуса сингулярности  $r_S$ . Выполнять закон Био–Савара на расстояниях  $r_S < L/(2N)$  не корректно, так как нельзя требовать большей точности моделирования, чем та, которая заложена при выполнении граничного условия на поверхности. При  $r_S > L/(2N)$  нарушается “О-принцип”. Следовательно, должно выполняться  $r_S = L/(2N)$ .

Аналогично исключается третий произвол МДВ — радиус буферной зоны  $r_B$ , возникающий в задачах о взаимодействии вихревых структур с твердыми границами. Принцип минимального искажения траекторий дает  $r_B = L/N$ , т.е. при пересечении вихрем твердой границы его нужно выставлять в обратную сторону на минимально возможное расстояние от точки пересечения вихрем контура тела.

Помимо указанных трех произволов МДВ обладает еще одной особенностью, выделяющей его из ряда численных методов.

Круг задач, которые призван решать МДВ, условно можно разбить на два класса: задачи, в которых требуется найти некоторые характеристики на границах, не вмонтированных в среду, причем влиянием остальных границ можно пренебречь, и задачи, для которых важным моментом является именно нахождение формы границ, вмонтированных в среду.

Известно, что точность решения второго класса задач существенно зависит от точности решения задачи Коши. Для задач со свободными границами, на которых гидродинамическое давление принимает заранее заданные значения, доказано, что в классе аналитических функций их постановка корректна, т.е., решение существует, единственно и непрерывно зависит от начальных и граничных данных для достаточно малого интервала времени. Однако по прошествии некоторого, как правило, небольшого расчетного интервала времени свободная граница обычно теряет устойчивость. Примечательным является тот факт, что почти все классические численные методы решения задачи Коши для системы дискретных вихрей, моделирующих поверхность тангенциального разрыва скорости, при повышении порядка точности метода дают обратный эффект — значительную потерю точности моделирования формы этой поверхности. Исключение составляет лишь метод “предиктор-корректор” с предикторным шагом, равным шагу по времени. Вместе с тем, применение этого метода для большинства практически важных задач, в которых число свободных дискретных вихрей исчисляется тысячами, приводит к многократному возрастанию и без того большого расчетного времени, не говоря об увеличении ошибок округления.

Причина описанной, на первый взгляд парадоксальной, ситуации состоит в следующем. Как известно, для любого численного метода существуют три типа ошибок. Первый — ошибки входных данных; второй — ошибки усечения или обрыва (ошибки метода); третий — ошибки округления (машинные ошибки). Обычно предполагается, что ошибки входа достаточно малы и основными ошибками, присущими используемому методу, являются ошибки усечения. Поэтому в случае методов решения задачи Коши порядок метода (его точность) определяется ошибками усечения или, точнее, локальными ошибками дискретизации по времени. Однако на самом деле величина ошибок входных данных задачи Коши для системы дискретных вихрей, моделирующих непрерывную вихревую поверхность несоразмерно велика даже по сравнению с ошибками усечения методов интегрирования первого порядка!

Движение ансамбля дискретных вихрей происходит в соответствии с законом дальнего действия (законом Био-Савара), то есть, основной вклад в величину скорости движения каждого вихря вносят ближайшие к нему вихри. В случае их достаточно близкого расположения большую долю в величину скорости будет вносить локальная ошибка дискретизации по пространству, которая является ошибкой входных данных для задачи Коши. Лифановым [6] показано, что для случая вихревой поверхности произвольной формы, которую моделируют дискретные вихри с равномерным шагом, порядок локальной ошибки дискретизации при вычислении нормальной компоненты индуцированной скорости вне радиусов дискретности может достигать  $O(N^{-\alpha} \ln N)$ , а погрешность вычисления касательной компоненты —  $|\gamma(\ell_\sigma(t, t^*))| \cdot \pi$ , где  $N$  — число дискретных вихрей, моделирующих единицу длины вихревой поверхности  $\sigma$ , а  $\alpha$  — показатель условия Гельдера, которому должна удовлетворять интенсивность непрерывного вихревого слоя  $\gamma(\ell_\sigma(t, t^*))$ .

Поэтому соотношение порядков локальных ошибок дискретизации по пространству (ошибки входных данных для задачи Коши) и по времени (ошибки усечения)



может достигать  $N^{p+1-\alpha} \ln N$ , где  $p$  — порядок применяемого метода интегрирования. Более того, так как вихревая поверхность со временем деформируется и растягивается, а число и интенсивности дискретных вихрей, моделирующих соответствующие ее участки, остается неизменным, локальные ошибки дискретизации по пространству будут возрастать с течением времени. Если шаг между дискретными вихрями представить в виде возрастающей функции от времени  $h = \beta(t)/N$ , то порядок локальной ошибки дискретизации по пространству в зависимости от времени можно записать в виде:  $O(N^{-\alpha} \beta^\alpha(t) \ln(N/\beta(t)))$ .

Таким образом, при выборе метода интегрирования для решения задачи Коши для системы дискретных вихрей, моделирующих вихревую поверхность, порядок метода не имеет определяющего значения! Приемлемость применения многошаговых методов будет определяться весовыми коэффициентами при скоростях на различных шагах по времени: в случае, если есть коэффициенты, большие единицы, то метод не следует использовать, так как он будет увеличивать ошибку входных данных (локальную ошибку дискретизации по пространству), величина которой может на один-четыре порядка превышать ошибку метода интегрирования.

Проиллюстрируем сказанное на примере трех методов, различающихся по указанному критерию — величине весовых коэффициентов. Будем сравнивать одношаговый метод Эйлера с двушаговым методом второго порядка точности, учитывающим ускорение вихря (у которого есть весовой коэффициент, близкий к 1.5) и с экономичным двушаговым методом первого порядка точности, который предлагается взамен метода второго порядка точности “предиктор–корректор” (с весовыми коэффициентами, равными 0.5). Все три метода используются для случая переменного шага по времени.

Радиус-вектор  $k$ -го дискретного вихря на  $n+1$  временном слое можно представить в виде:

$$\vec{r}(x_k, y_k, t^{(n+1)}) = \vec{r}(x_k, y_k, t^{(n)}) + \vec{W}^*(x_k, y_k, t^{(n)})(t^{(n+1)} - t^{(n)}).$$

В случае метода Эйлера

$$\vec{W}^*(x_k, y_k, t^{(n)}) = \vec{W}(x_k, y_k, t^{(n)}). \quad (7)$$

В случае метода второго порядка точности, учитывающего ускорение вихря

$$\begin{aligned} \vec{W}^*(x_k, y_k, t^{(n)}) = & \vec{W}(x_k, y_k, t^{(n)}) \left[ 1 + \frac{t^{(n+1)} - t^{(n)}}{2(t^{(n)} - t^{(n-1)})} \right] \\ & - \vec{W}(x_k, y_k, t^{(n-1)}) \frac{t^{(n+1)} - t^{(n)}}{2(t^{(n)} - t^{(n-1)})}. \end{aligned} \quad (8)$$

В случае предлагаемого метода

$$\vec{W}^*(x_k, y_k, t^{(n)}) = (\vec{W}(x_k, y_k, t^{(n-1)}) + \vec{W}(x_k, y_k, t^{(n)}))/2. \quad (9)$$

В выражениях (7)–(9) скорость  $\vec{W}$  в  $k$ -м дискретном вихре на  $n+1$  временном слое для случая ансамбля  $M$  вихрей вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \vec{W}(x_k, y_k, t^{(n)}) &= \sum_{i=1}^M \frac{\Gamma_i}{2\pi} \frac{(y_k(t^{(n)}) - y_i(t^{(n)}))\vec{i} - (x_k(t^{(n)}) - x_i(t^{(n)}))\vec{j}}{(x_k(t^{(n)}) - x_i(t^{(n)}))^2 + (y_k(t^{(n)}) - y_i(t^{(n)}))^2} \\ &= \sum_{i=1}^M \vec{W}(x_k, y_k, x_i, y_i, t^{(n)}), \end{aligned}$$

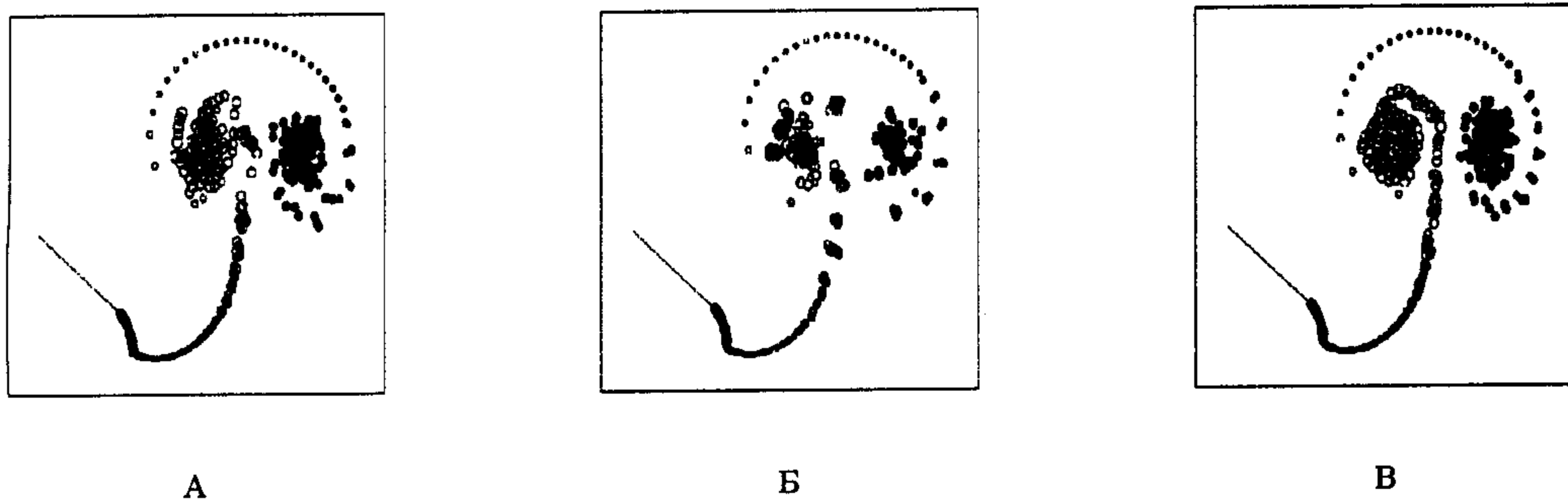


Рис. 1

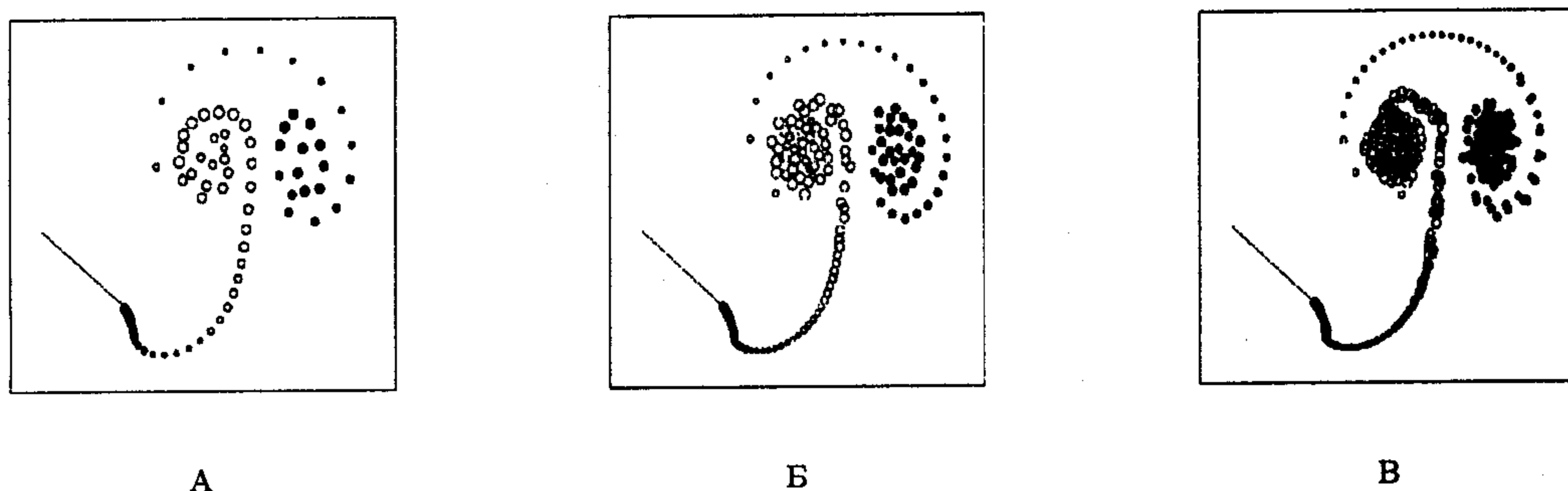


Рис. 2

причем, если  $|\vec{r}(x_k, y_k, t^{(n)}) - \vec{r}(x_i, y_i, t^{(n)})| < r_S$ , то скорость в  $k$ -м дискретном вихре от  $i$ -го дискретного вихря необходимо вычислять по Ранкину:

$$\vec{W}(x_k, y_k, x_i, y_i, t^{(n)}) = \frac{\Gamma_i (y_k(t^{(n)}) - y_i(t^{(n)}))\vec{i} - (x_k(t^{(n)}) - x_i(t^{(n)}))\vec{j}}{2\pi r_S^2}$$

На рис. 1, 2 представлены результаты тестовых расчетов вихревой картины в следе за колеблющимся крылом бесконечного размаха при безотрывном обтекании его передней кромки за один период колебаний с момента старта. Дискретные вихри, вращающиеся по часовой стрелке, обозначены черными кружками; против — белыми. Размеры кружков соответствуют величинам интенсивностей вихрей (в пределах каждого дискретного момента времени).

Задавалось движение с двумя степенями свободы — поступательные колебания по синусоидальному закону вдоль оси, перпендикулярной передней кромке крыла и направлению поступательного движения, и вращательные — относительно передней кромки крыла и отстающие от поступательных на угол  $\pi/2$ . Остальные параметры были следующие: амплитуда поступательных колебаний  $a = 0.3$ , амплитуда вращательных колебаний  $\theta = 40^\circ$ , относительная скорость  $\lambda_P = 0.75$ .

Рис. 1,а соответствует методу Эйлера (7); рис. 1,б — методу второго порядка точности (8); рис. 1,в — предлагаемому методу (9). Во всех трех случаях число дискретных вихрей  $N$ , моделирующих вихревой слой крыла, равнялось 80.

Видно, что наиболее физические когерентные структуры получаются в случае рис. 1,в. В случае метода Эйлера (см. рис. 1,а) наблюдаются проявления неустойчивости, а в случае метода второго порядка (см. рис. 1,б) вихревые ядра не имеют четких очертаний, наблюдается их разрушение.

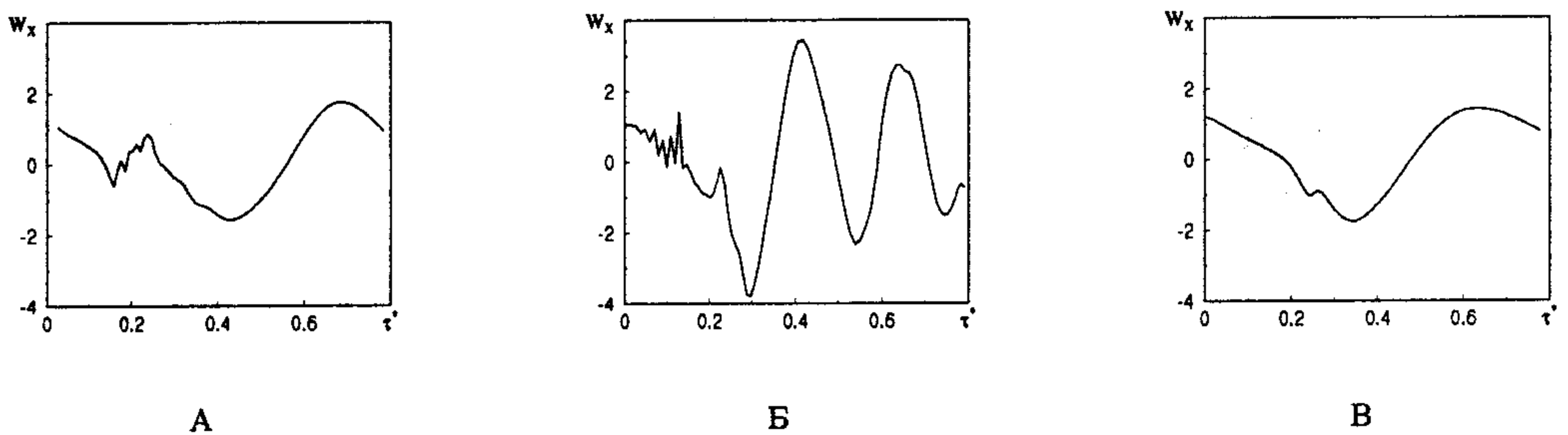


Рис. 3

Рис. 2 демонстрирует устойчивость результатов расчетов вихревого следа по методу (9) при  $N = 20$  (рис. 2,а),  $N = 40$  (рис. 2,б) и  $N = 80$  (рис. 2,в).

Последующие рисунки 3–6 соответствуют таким же параметрам движения крыла и одному и тому же промежутку времени. На рис. 3, 4 (а — метод Эйлера (7); б — метод (8); в — предлагаемый метод (9);  $N = 40$ ) показано, как, в зависимости от метода решения задачи Коши, менялись:

— одна из компонент скорости, индуцированной вихревым ансамблем в некотором свободном вихре, соответствующем одному и тому же участку вихревой пелены, от момента его схода с крыла до момента  $\tau = T$  (см. рис. 3);

— скорость соответствующего вихря на протяжении того же промежутка времени (см. рис. 4).

Видно, что методы (7) и (8) дают достаточно большие нерегулярные всплески, причем в случае метода второго порядка точности их амплитуда и частота возрастают; возрастают также и средние значения скоростей. В то же время метод (9) дает более гладкое поведение скорости.

На рис. 5 для  $N = 40$  и на рис. 6 для  $N = 80$  показано влияние методов интегрирования на траектории движения вихрей, (участок вихревой пелены и промежуток времени такой же, как и на рис. 3 и 4; а — метод Эйлера (7); б — метод (8); в — предлагаемый метод (9)). Вид траекторий при  $N = 40$  соответствует поведению скорости движения вихря (см. рис. 4 и 5). При  $N = 80$  отмеченная тенденция сохраняется, проявляясь в большей степени. Это связано с тем, что соотношение порядков локальной ошибки дискретизации по пространству и локальной ошибки дискретизации по времени при переходе от  $N = 40$  к  $N = 80$  увеличивается в 2–4 раза для методов первого порядка точности и в 5–8 раз для методов второго порядка точности (в зависимости от величины показателя условия Гельдера  $\alpha$ ).

Таким образом, результаты, приведенные на рисунках 1–6, подтверждают сделанный ранее вывод о том, что при выборе метода интегрирования для решения задачи Коши для системы дискретных вихрей, моделирующих вихревую поверхность, определяющее значение имеет не порядок метода интегрирования, а величина весовых коэффициентов при скоростях на различных шагах по времени. Для достижения наибольшей точности моделирования вихревой поверхности системой дискретных вихрей необходимо применять двушаговый метод интегрирования с весовыми коэффициентами, равными 0.5.

Апробация УМДВ была проведена на нестационарной нелинейной задаче о негармонических угловых колебаниях бесконечно тонкого крыла бесконечного размаха вблизи твердой поверхности (экрана) при отсутствии щели между поверхностью и осью вращения крыла. Рассматривался случай максимальной нестационарности — мгновенный старт (поворот) крыла от экрана с последующим возвратно-вращательным движением в неподвижной среде [29].

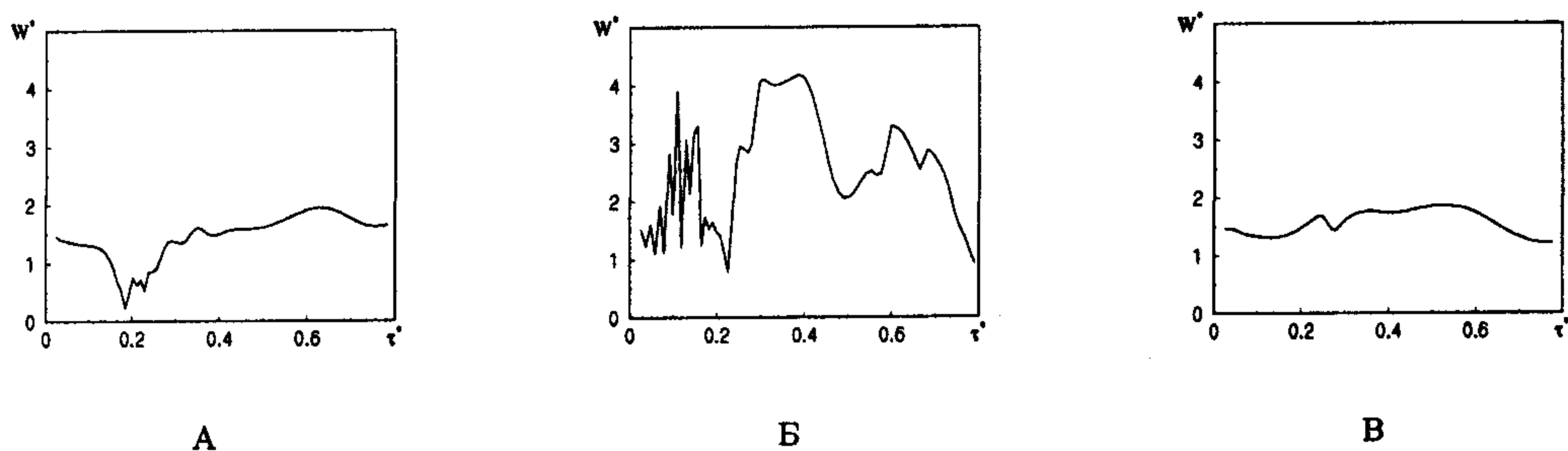


Рис. 4

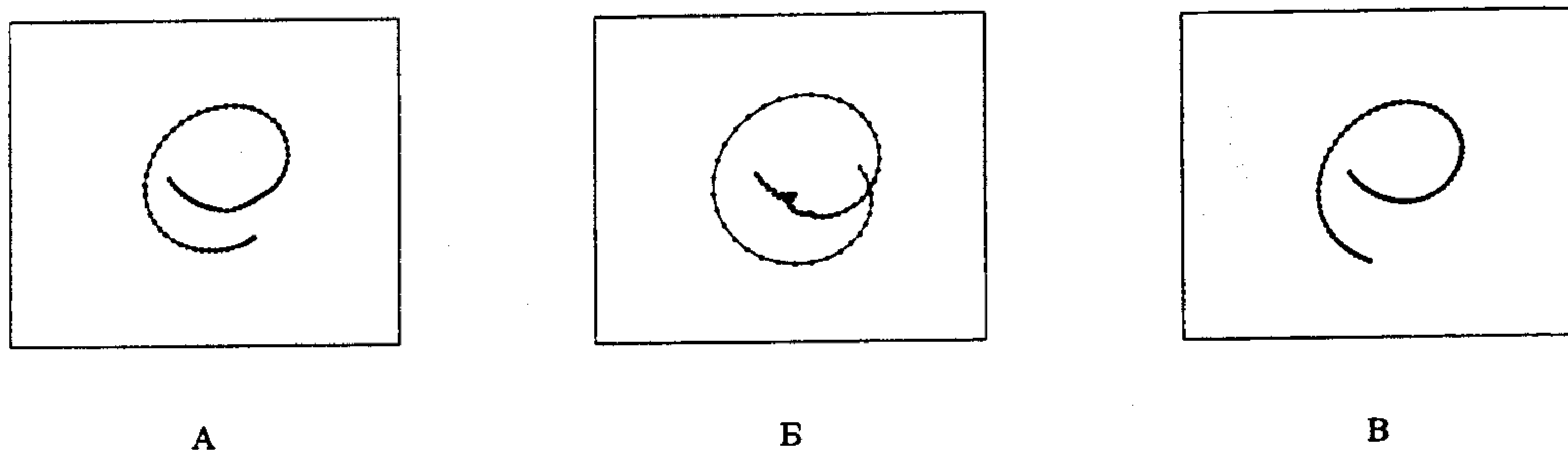


Рис. 5

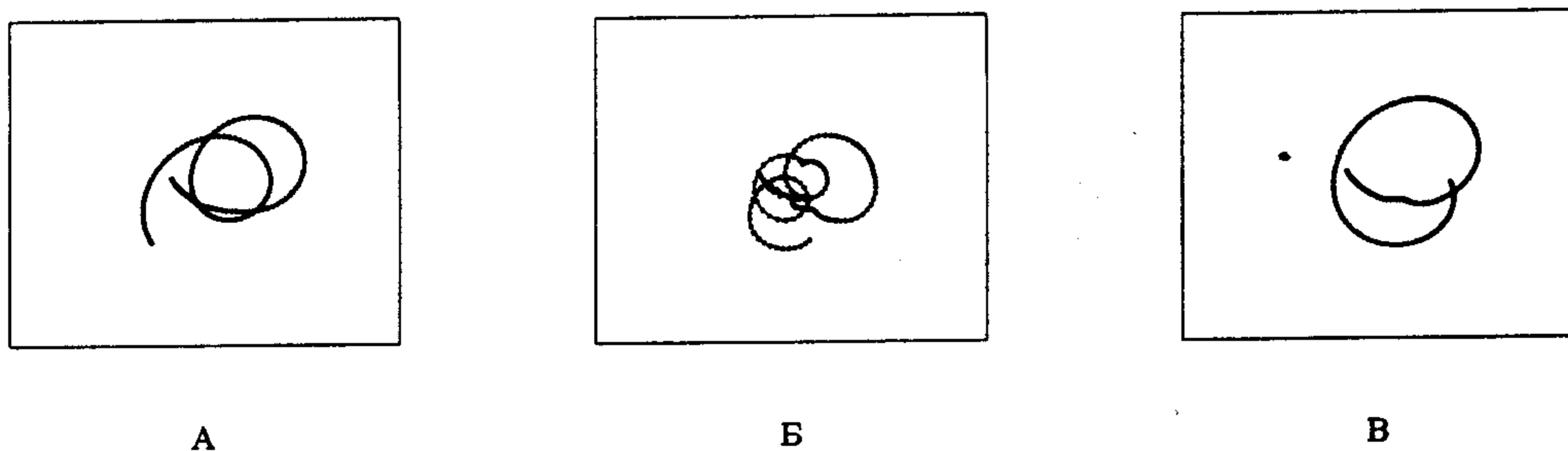


Рис. 6

Крыло предполагалась абсолютно твердым, непроницаемым и прямолинейным, а среда — идеальной, несжимаемой и невесомой. В первый момент времени предполагалось, что среда покоится, вихри отсутствуют, а крыло расположено на расстоянии 0.1 своей длины параллельно экрану. Ось вращения находится на конце крыла.

Подчеркнем, что существующие численные методы, в том числе и МДВ, не способны дать удовлетворительное решение задачи данного типа [30–39].

На рис. 7, а–г показано формирование вихревой структуры для поворота крыла на угол  $30^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $180^\circ - 30^\circ$ ,  $180^\circ - 120^\circ$  соответственно. Совместно с вихревыми картинками приведены поля возмущенных скоростей. Вектора, имеющие длины больше единицы, обозначены более темными стрелками.

Из рисунка видно, что формирующиеся когерентные вихревые структуры активно взаимодействовали с вращающимся крылом и с экраном, однако вихри не проникали через твердые поверхности. Особенностью данной задачи является образование высокоинтенсивного вихревого жгута при вращении крыла против часовой стрелки, который при обратном ходе крыла засасывается во вновь образующуюся

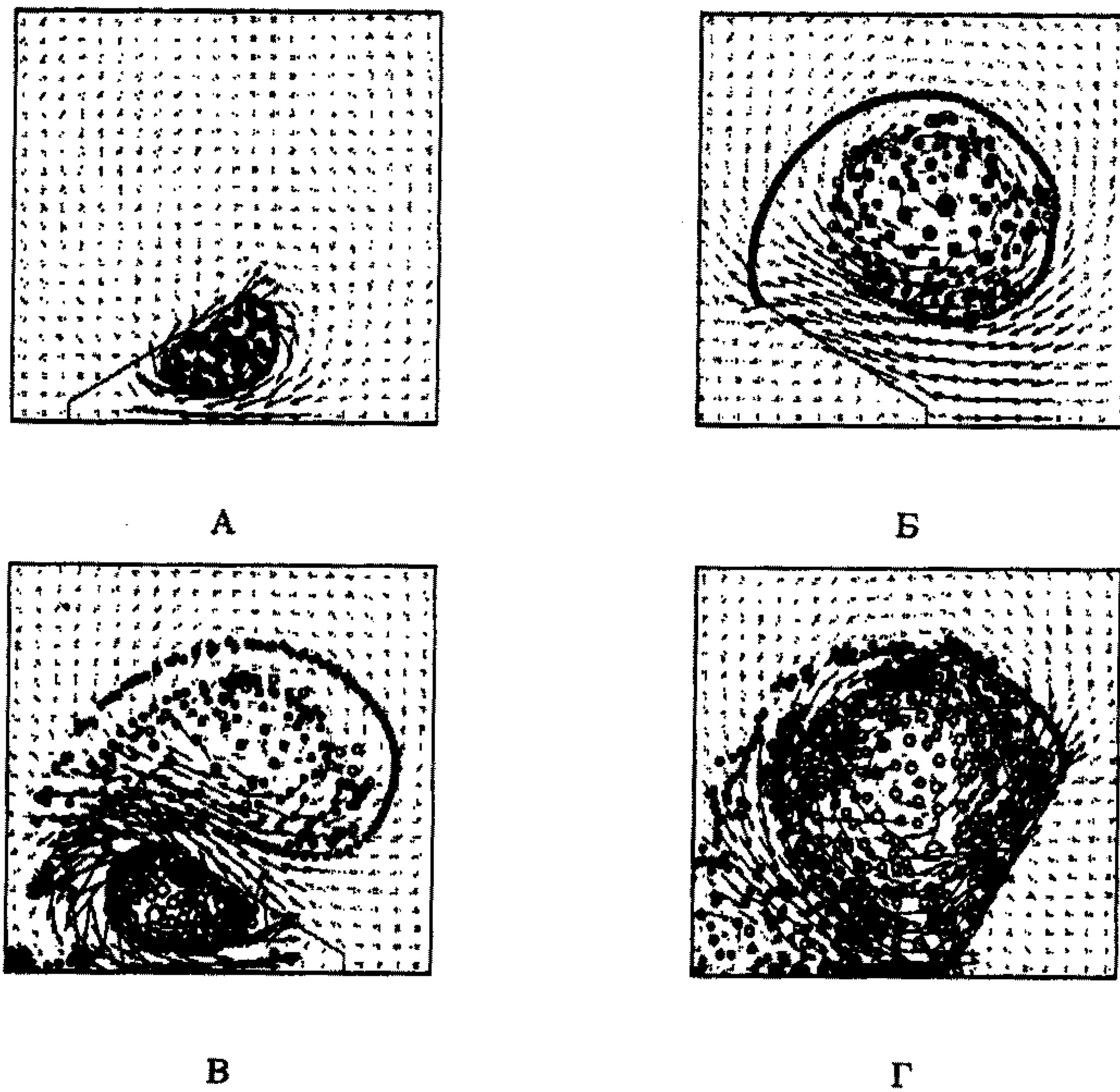


Рис. 7

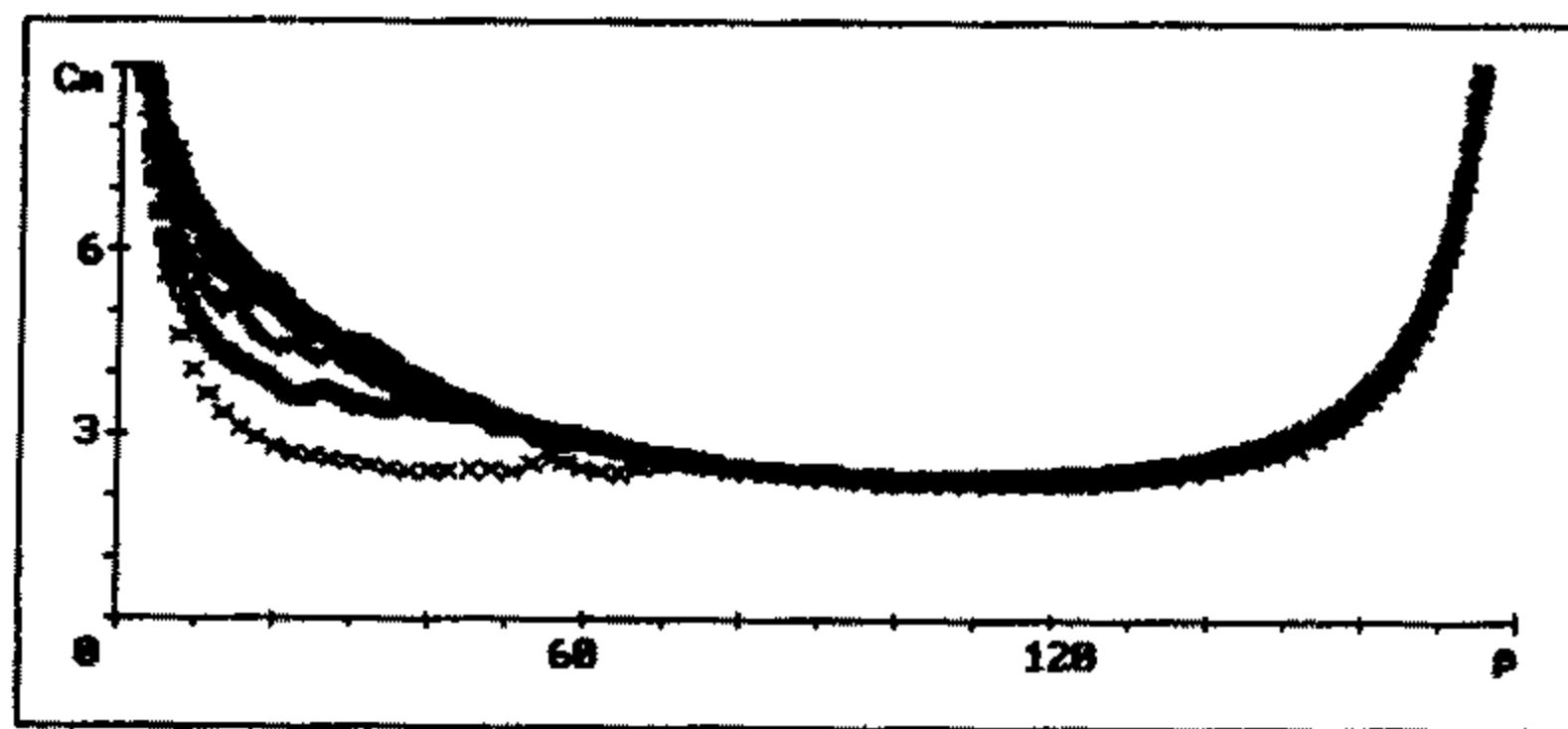


Рис. 8

щель. Дальнейшее вращение крыла приводит к тому, что предыдущий вихрь обволакивает новый; суммарное вихреобразование приобретает размеры, вдвое превосходящие размеры первоначального жгута, и прижимается к крылу и экрану.

Сравнение полученных результатов с известными экспериментальными данными [33, 38] дало хорошее соответствие.

Серия численных расчетов по проверке сходимости УМДВ для данной задачи показала, что с увеличением числа дискретных вихрей, моделирующих крыло, все мгновенные интегральные характеристики крыла асимптотически стремятся к некоторым предельным значениям (в частности, коэффициент момента относительно оси вращения крыла — см. рис. 8.). Знаки  $\times$ ,  $\square$ ,  $+$ ,  $\diamond$ ,  $*$ , обозначают мгновенные значения коэффициента момента при числе суммарных вихрей на крыле, равном 20, 40, 60, 80, 100 соответственно. Таким образом, впервые удалось получить сходящееся в вычислительном смысле решение для задачи указанного типа.

## ЛИТЕРАТУРА

1. T. Sargkaya, *Computational methods with vortices — The 1988 freeman scholar lecture*, J. of Fluid Eng. (1989), № 1, 5–56 ; Перевод на русский, *Вычислительные методы вихрей. Фримановская лекция (1988)*, Современное машиностроение Сер.А. 10 (1989), 1–60.
2. L. Rosenhead, *Formation of vortices from a surface of discontinuity*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A. 134 (1931), 170–192.
3. М. А. Лаврентьев, *О построении потока, обтекающего дугу заданной формы*, Тр. ЦАГИ (1932), № 113, 3–56.
4. С. М. Белоцерковский, *Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа*, “Наука”, Москва, 1965.
5. С. М. Белоцерковский, М. И. Ништ, *Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью*, “Наука”, Москва, 1978.
6. И. К. Лифанов, *Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент*, ТОО “Янус”, Москва, 1995.
7. И. К. Лифанов, *О некорректности и регуляризации численного решения сингулярных интегральных уравнений первого рода*, ДАН СССР 255 (1980), № 5, 1046–1051.
8. С. М. Белоцерковский, И. К. Лифанов, *Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях*, “Наука”, Москва, 1985.
9. А. Ф. Матвеев, *О саморегуляризации задачи вычисления сингулярных интегралов с ядрами Коши и Гильберта в равномерной метрике  $C$* , Препр. АН Украины. ИТЭФ, Москва, 1982.
10. Н. Ф. Воробьев, *Аэродинамика несущих поверхностей в установившемся потоке*, “Наука”, Новосибирск, 1985.
11. С. И. Путилин, В. Т. Савченко, *Исследование точности расчета крыла по различным схемам*, Гидромеханика, т. 58, “Наукова думка”, Киев, 1988, стр. 41–47.
12. Г. Г. Судаков, *О локальной сходимости решения в методе дискретных вихрей*, Уч. зап. ЦАГИ 20 (1989), № 4, 15–25.
13. Е. Е. Егоров, *Математический анализ метода дискретных вихрей с равномерным распределением*, Тр. ЦАГИ (1993), № 2496, 3–11.
14. И. К. Лифанов, Я. Е. Полонский, *Обоснование численного метода дискретных вихрей решения сингулярных интегральных уравнений*, ПММ 39 (1975), № 4, 742–746.
15. И. К. Лифанов, *О сингулярных интегральных уравнениях с одномерными и кратными интегралами типа Коши*, ДАН СССР 239 (1978), № 2, 265–268.
16. Л. Н. Полтавский, *К условию Чаплыгина–Жуковского в линейной нестационарной задаче для профиля*, Тр. ВВИАУ им. проф. Н. Е. Жуковского (1986), № 1313, 419–423.
17. Д. Н. Горелов, Р. Л. Куляев, *Нелинейная задача о нестационарном обтекании тонкого профиля несжимаемой жидкостью*, Изв. АН СССР, МЖГ (1971), № 6, 38–48.
18. Д. Н. Горелов, *Локальная аппроксимация вихревого слоя системой дискретных вихрей*, Прикл. мат. и теор. физика (1980), № 5, 76–82.
19. Д. Н. Горелов, *О сходимости метода дискретных вихрей, основанного на локальной аппроксимации вихревого слоя*, Динамика многофазных сред (1984), № 68, 82–91.
20. J. D. Joung, *Convergence — proof of discrete — panel wing loading theories*, J. Aircraft 8 (1971), № 10, 159–172.
21. В. Ф. Молчанов, *О реализации метода плоских сечений в нелинейной теории крыла*, Уч. зап. ЦАГИ 5 (1974), № 2, 1–9.
22. В. Г. Мишкевич, *О методах непрерывного и дискретного вихревых слоев в теории несущих поверхностей*, Сб.НТО им. акад. А. Н. Крылова (1974), № 217, 34–57.
23. И. К. Лифанов, *О методе дискретных вихрей*, ПММ 43 (1979), № 1, 184–188.
24. И. К. Лифанов, *О методе дискретных вихрей для крыла бесконечного размаха и уравнении Прандтля для крыла конечного размаха*, Изв. вузов. Сер. матем. (1980), № 6, 44–51.
25. И. К. Лифанов, *О численном решении сингулярных интегральных уравнений*, Дифф. уравнения 17 (1981), № 12, 42–46.
26. И. К. Лифанов, Л. Н. Полтавский, *Линейная нестационарная задача для профиля и уравнение Абеля*, Вопр. кибернет. Численный эксперимент в прикладной аэрогидродинамике, АН СССР, Научный совет по комплексной проблеме “Кибернетика”, Москва, 1986, стр. 23–47.
27. В. Э. Сарен, *О сходимости метода вихрей*, Сибирский математический журнал 19 (1978), № 2, 385–395.

28. М. Т. Баринов, *Оценка стоимости метода дискретных вихрей при расчете обтекания круглого цилиндра*, Динамика сплошной среды с границами раздела, Чувашск. гос. ун-т, Чебоксары, 1982, стор. 15-24.
29. A. V. Shekhovtsov, *Investigation of an initial stage of vortex formation near a surface*, Effects of Organized Vortex Motion on Heat and Mass Transfer, Kiev, 1994, стор. 62.
30. С. М. Белоцерковский, В. В. Гуляев, М. И. Ништ, *К изучению полета насекомых и птиц*, ДАН СССР 219 (1974), № 3, 567-570.
31. H. J. Haussling, *Boundary-fitted coordinates for accurate numerical solution of multibody flow problems*, J. Comp. Phys. 30 (1979), 107-124.
32. R. H. Edwards, H. K. Cheng, *The separation vortex in the Weis-Fogh circulation generation mechanism*, J. Fluid Mech. 120 (1982), 463-473.
33. G. R. Spedding, T. Maxworthy, *The generation of circulation and lift in a rigid two-dimensional fling*, J. Fluid Mech. 165 (1986), 247-272.
34. M. Tsutahara, T. Kimura, *Aerodynamic characteristics of the Weis-Fogh mechanism (II) Numerical computations by the discrete vortex method*, Нихон коку утю гайккайси. J. Jap. Soc. Aeronaut. and Space Sci. 35 (1987), № 407, 596-604.
35. M. H. Sohn, J. C. Wu, *A numerical study of the Weis-Fogh mechanism*, AIAA Pap. (1987), № 238, 1-11.
36. С. А. Довгий, А. В. Шеховцов, *Численное моделирование начального этапа раскрытия крыльев осы "Encarsia formosa"*, Бионика, т. 25, "Наукова думка", Киев, 1992, стор. 17-24.
37. С. А. Довгий, А. В. Шеховцов, *Об одном механизме образования высокой подъемной силы при трепещущем полете насекомых*, Бионика. Вып.26, "Наукова думка", Киев, 1992, стор. 74-83.
38. T. Maxworthy, *Experiments on the Weis-Fogh mechanism of lift generation by insects in hovering flight. Part I. Dynamics of the "fling"*, J. Fluid Mech. 93 (1979), № 1, 47-63.
39. А. В. Шеховцов, *Модифицированный механизм "броска" для случая гибких крыльев*, Бионика. Вып.27-28, "Наукова думка", Киев, 1998, стор. 55-67.