Обчислювальна та прикладна математика
Вип. 82, 1997, стор. 55–68

Computational and Applied Mathematics
No. 82, 1997, pp. 55–68

КОНСТАНТЫ УСТОЙЧИВОСТИ АППРОКСИМАЦИЙ КУРАНТА

УДК 519.632.4

В. Л. МАКАРОВ И Г. А. СБРОДОВА

РЕЗЮМЕ. Стаья посвящена исследованию констант устойчивости для курантовских аппроксимаций в метрике пространств $L_2(\Omega)$, $W_2^1(\Omega)$ в классах треугольных сеток с равномерно ограниченными углами, а также с углами, стремящимися к нулю. В первом случае даны достаточно точные числовые оценки констант, а во втором — указаны асимптотики поведения границ соответствующих квадратичных форм.

Проблема устойчивости важна как в вопросах аппроксимации и оценок скоорости сходимости, так и при реализации вычислительных процессов. Константы необходимы для получения конкретных значений в оценках границ погрешностей, а также при решении практических вопросов, связанных с вычислениями (выбор вариационно-разностной сетки, типа арифметического процессора, типа необходимого математического обеспечения). В методе конечных элементов, связанных с триангуляцией области, большую роль играет степень вырожденности треугольников, поэтому важно границы углов этих треугольников ввести в число параметров класса рассматриваемых сеток. В отдельных случаях (для областей с углами и заострениями) приходится расширять класс таких сеток, заменяя упомянутые параметры асимптотикой поведения углов в зависимости от шага.

В данной работе рассматриваются оценки локальной устойчивости в метриках пространств L_2, W_2^1 и классы сеток с равномерно ограниченными углами (равномерно отделенными от 0 и от π), а также с углами, стремящимися к 0. Рассматривается случай, когда один угол стремится к 0, а остальные два — к ненулевым значениям, и случай, когда два угла стремятся к 0, а один угол — к π.

1. Роль констант устойчивости

1.1. Роль констант устойчивости в метрике L_2.

При реализации схем М.К.Э. особое значение приобретают оценки констант устойчивости, ибо через них выражаются константы в априорных оценках точности аппроксимаций [1] и оценках устойчивости в смысле Михлина [2].

Пусть решается задача $AU = f$ с положительно определенным самосопряженным оператором A, то погрешность δf правой части ведет к погрешности $\delta\tilde{u}$ приближенного решения $\tilde{u}$, удовлетворяющего соотношению $\|\delta\tilde{u}\| \le C\|\delta f\|$, где константа C не зависит от f, δf и от аппроксимирующего пространства. Однако численное решение задачи состоит в отыскании вектора $\nu^h = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N)$, как решения уравнения $A_h\nu^h = f_h$, погрешность $\delta\nu^h = (\delta\nu_1, \dots, \delta\nu_N)$ которого связана с погрешностью $\delta\tilde{u}$ равенством $\delta\tilde{u} = \sum_{j=1}^N w_j \cdot \delta\nu_j$, где $\{w_j\}$ — рассматриваемый набор базисных функций. Различные аспекты устойчивости решения подобной задачи изучались С.Г.Михлиным [2]. Для устойчивости обеих задач весьма важно неравенство эквивалентности вида

$$\lambda_1\|\nu\|_0' \leq \left\|\sum_{j=1}^{N}\nu_j w_j\right\|_0 \leq \lambda_2\|\nu\|_0', \tag{1.1}$$

где $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_0'$ — подходящая функциональная и сеточная норма [1].

От качества триангуляции зависят величины λ_1 и λ_2, λ_2 входит в оценку точности решения, а λ_1 в оценку устойчивости вычислительного процесса [1, 2, 3].

Имеют место оценки [3]

$$\|A_h^{-1}\| \leq m!C_1^m/(2^m C_2\lambda_1), \tag{1.2}$$

$$\|\nu^h\| \leq \sqrt{m}C_0C_1^{\frac{m}{2}}\left(2^{\frac{m}{2}}\lambda_1^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\|u\|_{w_2^{(s)}}, \tag{1.3}$$

где $\nu^h = \{\nu_{ki}\}$, A_h — оператор, определяемый матрицей системы энергетических произведений.

Для устойчивости вычислительного процесса достаточно, чтобы величины $\|A_h^{-1}\|$ и $\|\nu^h\|$ были ограничены в совокупности [2] (как можно меньше константы).

С другой стороны, имеет место

Теорема. [1]

$$\left\|\tilde{u}^{(i)} - u^{(i)}\right\|_{L_q(a,b)} \leq c(m+1)^{1/p}h^{\gamma-i}\left\|u^{(m+1)}\right\|_{L_p(a,b)}, \tag{1.4}$$

$$c = c(k_0+1), \quad \gamma = q^{-1}+p^{-1}+m+1, \quad i=\overline{0,m}, \quad q \geq p \geq 1,$$

$h = \max|x_{k+1}-x_k|$,

$$c(k_0) = \lambda_2(m-i+1)^{1/q}k_0^{m_e}2^m\left\{2\left[k_0(k_0^{e+m}-1)+k_0^{-e}-1\right](k_0-1)^{-1}\right\}^{1/p}. \tag{1.5}$$

Как видно из неравенств (1.2)–(1.5), чем меньше λ_2, тем лучше аппроксимация, а чем больше λ_1, тем лучше оценка устойчивости. Поэтому будем судить о качестве триангуляции по критерию, чтобы отношение
$\inf_{\Omega_h}\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \geq \frac{\inf\lambda_2}{\sup\lambda_1}$ было минимальным.

1.2. Роль констант устойчивости в пространстве W_2^1.

Неравенство устойчивости в W_2^1 будет иметь вид (см. 1.3).

$$\lambda_1\sum_{i,j}(\nu_i-\nu_j)^2 \leq \int_\Omega(\nabla\tilde{u})^2\,dx \leq \lambda_2\sum_{i,j}(\nu_i-\nu_j)^2. \tag{1.6}$$

Применим к криволинейной области метод Ритца с курантовским элементами (М.К.Э). Получим уравнение

$$A_h u^h = f_h \tag{1.7}$$

где A_h — матрица Ритца, заполненная и имеющая сложную структуру. Для того, чтобы решить уравнение (1.7), будем использовать итерационный процесс с предобуславливателем и с чебышевскими параметрами

$$B\frac{y_{k+1}-y_k}{\tau_{k+1}} + A_h y_k = f_h, \qquad k=0,1,\ldots,n, \tag{1.8}$$

где

$$\tau_k = \frac{\tau_0}{1+\rho_0\mu_k}, \qquad \mu_k \in M_n = \left\{-\cos\frac{(2i-1)\pi}{2n}, 1 \leq i \leq n\right\},$$

$$\tau_0 = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \qquad \rho_0 = \frac{1-\xi}{1+\xi}, \qquad \rho_1 = \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}}, \qquad \xi = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Предобуславливатель B должен быть энергетически эквивалентен оператору A_h, $(\lambda_1 B \le A_h \le \lambda_2 B)$, кроме того, чтобы его можно было экономично и легко обращать.

Для выбора предобуславливателя рассмотрим сначала М.К.Э для оператора Лапласа в прямоугольнике Ω_h.

Введем прямоугольную равномерную сетку с шагом $h_i = \frac{b_i}{N_i}$:
$\Omega_h = \{(x_1, x_2),\ x_i = ih_1,\ x_2 = jh_2,\ i = \overline{0, 2N_1},\ j = \overline{0, N_2}\}$ и базисную функцию

$$\phi_y(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{h_2}(y_2 - x_2), & x \in T_1 \\ 1 + \frac{1}{h_1}(y_1 - x_1), & x \in T_2 \\ 1 + \frac{1}{h_1}(y_1 - x_1) - \frac{1}{h_2}(y_2 - x_2), & x \in T_3 \\ 1 - \frac{1}{h_2}(y_2 - x_2), & x \in T_4 \\ 1 - \frac{1}{h_1}(y_1 - x_1), & x \in T_5 \\ 1 - \frac{1}{h_1}(y_1 - x_1) + \frac{1}{h_2}(y_2 - x_2), & x \in T_6. \end{cases}$$

В соответствии с идеей М.К.Э будем искать приближенное решение уравнения Пуассона в виде суммы

$$u^h(x) = \sum \nu_y \phi_y(x), \tag{1.9}$$

где ν_y находим из системы алгебраических уравнений

$$\sum_{y \in \Omega_h} \nu_y L(\phi_y, \phi_z) = (f, \phi_z), \qquad z \in \Omega_h \tag{1.10}$$

или

$$A_h = \|L(\phi_y, \phi_z)\|_1, \qquad a_h \nu^h = f_h.$$

Занумеруем узлы в следующем порядке $y^{(1)} = (h_1, h_2)$, $y^{(2)} = (h_1, 2h_2)$, $y^{(N_2-1)} = (h_1, (N_2-1)h_2)$, $y^{(N_2)} = (2h_1, h_2)$, $\ldots$, $y^{((N_1-1)\times(N_2-1))} =$ $((2N_1-1)h_1, (N_2-1)h_2)$, и компоненты вектора ν расположим в соответствии с выбранной нумерацией узлов, тогда матрица системы (1.10) запишется в следующем виде

$$B = \begin{vmatrix} B_1 & A_1^T & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_2 & B_2 & A_2^T & \cdot & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & A_{2N_1-1} & B_{2N_1-1} \end{vmatrix} \tag{1.11}$$

где A_i, B_i — квадратные матрицы размером $(N_2-1)^2$.

$B_i = h_1/h_2 D + 2h_2/h_1 I$, $i = 1, \ldots, 2N_1 - 1$; $A_i = -h_2/h_1 I$, $i = 1, \ldots, 2N_1 - 1$;

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdot & \cdot & -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{vmatrix}.$$

Имеет место соотношение

$$\int_{\tilde{\Omega}} (\nabla \tilde{u})^2\, dx = \sum_{i,j} (\nu_i - \nu_j)^2 h_1 h_2 = (A_h \nu^h, \nu^h). \tag{1.12}$$

Пусть теперь область Ω имеет криволинейную границу. Если ее триангулировать таким образом, чтобы нам удалось перенумеровать узлы в соответствии с нумерацией в прямоугольнике (а это можно сделать с помощью комформного отображения (см.работы [4, 5, 6])), то оценки устойчивости в W_2^1 (1.6) есть не что иное, как энергетическая эквивалентность матрицы Ритца для прямоугольника матрице Ритца для произвольной области. Следовательно, в итерационном процессе (1.8) для этого случая в качестве предобуславливателя B можно выбрать (1.11). Он имеет простую структуру (блочно-трехдиагональная матрица) и его можно экономно обращать (см.,например, [5, 6]).

Поэтому необходимо как можно точнее выбрать константы устойчивости. Чем ближе они будут друг к другу, тем быстрее сходится итерационный процесс. Поэтому как и в L_2, будем судить о качестве триангуляции по критерию, чтобы отношение $\max \lambda_1 / \min \lambda_1$ было минимальным.

Таким образом приходим к критерию

$$\max\left\{\frac{\max \lambda_2^{L_2}}{\min \lambda_1^{L_2}}, \frac{\max \lambda_2^{W_1^2}}{\min \lambda_1^{W_1^2}}\right\} \longrightarrow \min, \tag{1.13}$$

который положен в основу определения α -триангуляции.

Определение. Среди всевозможных триангуляций, построенных для заданной области, α -триангуляцией назовем такую, у которой отношение (1.13) является минимальным.

2. Константы устойчивости в пространстве L_2

В этом параграфе займемся упомянутой во введении задачей в метрике пространства $L_2(\Omega)$. Рассмотрим треугольник с координатами $(0,0)$, $(x,0)$, (x,y). Обозначим перечисленные точки буквами O, B, A, длины отрезков OB и OA через a и b соответственно: $OA = b$, $OB = a$. Рассмотрим полученный треугольник $T = \Delta OAB$. Введем еще обозначения ϕ для его угла при вершине O. Тогда $x_2 = b\cos\phi$, $y_2 = b\sin\phi$, $x_1 = a$, $y_1 = 0$. Найдем линейное преобразование нашего треугольника T в стандартный треугольник T_0:

$$T_0 \stackrel{def}{=} \{(x', y')/0 \le x', y', x' + y' \le 1\},$$

так, чтобы точка A перешла в A', точка B перешла в B', точка O перешла в O'.

Для матрицы $\begin{pmatrix} \bar\alpha & \bar\beta \\ \bar\gamma & \bar\delta \end{pmatrix}$ обратного преобразования G^{-1} имеем равенства

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar\alpha & \bar\beta \\ \bar\gamma & \bar\delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

$$\begin{pmatrix} b\cos\phi \\ b\sin\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar\alpha & \bar\beta \\ \bar\gamma & \bar\delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Откуда из (2.1) $\bar\alpha = a$, $\bar\gamma = 0$, а из (2.2) $\bar\beta = b\cos\phi$, $\bar\delta = b\sin\phi$. Итак, вектор $\xi' = (x', y')$ преобразуется в вектор $\xi = (x, y)$ по правилу

$$\xi = G^{-1}\xi', \qquad G^{-1} = \begin{pmatrix} a & b\cos\phi \\ 0 & b\sin\phi \end{pmatrix}.$$

Это правило эквивалентно записи

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b\cos\phi \\ 0 & b\sin\phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Найдем обратное преобразование $\xi' = G\xi$. Очевидно

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{ab\sin\phi} \cdot \begin{pmatrix} b\sin\phi & -b\cos\phi \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$$

$$G = \frac{1}{ab\sin\phi} \cdot \begin{pmatrix} b\sin\phi & -b\cos\phi \\ 0 & a \end{pmatrix};$$

$$\iint\limits_T f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_T f(x(x',y'),y(x',y'))|J|\,dx'\,dy', \tag{2.4}$$

$$|J| = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial x'} \\ \frac{\partial x}{\partial y'} & \frac{\partial y}{\partial y'} \end{pmatrix}.$$

Из (2.3) имеем

$$\begin{aligned} x &= ax' + b\cos\phi\cdot y', \\ y &= 0 + b\sin\phi\cdot y'. \end{aligned} \tag{2.5}$$

откуда

$$|J| = \det\begin{pmatrix} a & 0 \\ b\cos\phi & b\sin\phi \end{pmatrix} = ab\sin\phi. \tag{2.6}$$

Пусть Ω — некоторая область в R^2, рассмотрим правильно триангулированный многоугольник $\tilde\Omega \subset \Omega$. Перенумеруем все вершины нашей триангуляции натуральными числами. Пусть $\xi_i = (x_j, y_j)$ — j-ая вершина триангуляции, $j = \overline{1,N}$. Множество треугольников, у которых j-ая вершина общая или имеющих общую вершину ξ_i, назовем барицентрической звездой и обозначим ζ_i. На ζ_i зададим кусочно-линейную и непрерывную функцию $w_j(\xi_i)$, которая линейна на каждом треугольнике, обращается в 1 в вершинах ξ_i и в 0 в остальных вершинах. В множестве $\tilde\Omega \setminus \zeta_j$ будем считать эту функцию равной 0. Линейная комбинация курантовских функций

$$\tilde u(x) = \sum_{j=1}^{N} \nu_j w_j(x),$$

где ν_j — числа, а w_j — упомянутые функции Куранта, представляет собой кусочно-линейную функцию на многоугольнике $\tilde\Omega$, очевидно

$$\|\tilde u\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_j a_{ij}\nu_i\nu_j, \tag{2.7}$$

где $a_{ij} = \int_{\tilde\Omega} w_i w_j\,dx$.

Лемма 1. *Справедливы неравенства*

$$\frac{1}{16}\sum_j m\zeta_j\nu_j^2 \le \int_{\tilde\Omega} (\tilde u)^2\,dx \le \frac{1}{8}\sum_j m\zeta_j\nu_j^2,$$

где $m\zeta_j$ — площадь барицентрической звезды.

Доказательство. Для удобства обозначим z_i — сужение функции w_i на треугольнике T. Поскольку уравнение плоскости, проходящей через точки (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2), (x_3,y_3,z_3), имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 & z_1-z_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

то, полагая $z_1 = z_2 = 0$, $x_3 = y_3 = 0$, $z_3 = 1$, найдем плоскость, проходящую через интересующие нас точки: $(x_1,y_1,0)$, $(x_2,y_2,0)$, $(0,0,1)$,

$$\begin{vmatrix} x & y & z_0-1 \\ x_1 & y_1 & -1 \\ x_2 & y_2 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда находим выражение для функции $z_0(x,y)$:

$$z_0 = 1 - \frac{x(y_2 - y_1) - y(x_2 - x_1)}{x_1 y_2 - y_1 x_2}.$$

Перепишем это выражение в другом виде

$$z_0 = 1 - \frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_2}\left(\frac{x_2}{x_1} - 1\right) = 1 - \frac{x}{a} + \frac{y}{ab\sin\phi}(b\cos\phi - a). \tag{2.8}$$

Имеем

$$a_{11} = \iint\limits_T f(x,y)\,dx\,dy, \quad \text{где} \quad f(x,y) = |z_0|^2.$$

Используя преобразования (2.4)–(2.6), найдем

$$\int_T |z_0|^2\,dx\,dy = |ab\sin\phi| \int_0^1 dx' \int_0^{1-x'} (1 - x' - y')^2\,dy' = \frac{|ab\sin\phi|}{12}.$$

Аналогично для z_1 и z_2. Для z_1 надо провести плоскость через следующие три точки: $(0,0,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,0)$.

$$z_1 = x', \qquad \iint\limits_T |z_1|^2\,dx\,dy = \frac{|ab\sin\phi|}{12}.$$

Таким образом, $a_{22} = |ab\sin\phi|/12$.

Для того, чтобы найти z_2, проводим плоскость через три точки $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,1)$. Отсюда следует

$$z_2 = y', \qquad \iint\limits_T |z_2|^2\,dx\,dy = \frac{|ab\sin\phi|}{12}, \qquad a_{33} = |ab\sin\phi|/12.$$

Найдем значения a_{ij}, $i \neq j$.

$$a_{12} = \int_T z_1 z_2\,dx\,dy = \frac{|ab\sin\phi|}{24},$$

$$a_{10} = \int_T z_1 z_0\,dx\,dy = |ab\sin\phi| \int_0^1 dx' \int_0^{1-x'} x'(1 - x' - y')\,dy' = \frac{|ab\sin\phi|}{24},$$

аналогично

$$a_{20} = \int_T z_2 z_0\,dx\,dy = \frac{|ab\sin\phi|}{24}.$$

Таким образом, имеем

$$\int_{\tilde\Omega} (\tilde u)^2\,dx = \sum_{T\in\tilde\Omega} \int_T \left(\sum_{j=0}^{2} \nu_{T,j} w_{T,j}\right)^2 dx'\,dy'$$

$$= \sum_{T\in\tilde\Omega} \frac{a_T b_T \sin\phi_T}{24}\left[2\nu_{T,0}^2 + 2\nu_{T,1}^2 + 2\nu_{T,2}^2 + \nu_{T,0}\nu_{T,1} + \nu_{T,0}\nu_{T,2} + \nu_{T,1}\nu_{T,2}\right].$$

Этой квадратичной форме соответствует матрица B

$$B = \begin{vmatrix} 2 & \frac12 & \frac12 \\ \frac12 & 2 & \frac12 \\ \frac12 & \frac12 & 2 \end{vmatrix}.$$

Найдем собственные числа матрицы B: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 3/2$, с учетом равенства

$$\int_T (\tilde{u})^2\,dx = \frac{a_T b_T \sin\phi_T}{24}\left[2\nu_{T,0}^2 + 2\nu_{T,1}^2 + 2\nu_{T,2}^2 + \nu_{T,0}\nu_{T,1} + \nu_{T,0}\nu_{T,2} + \nu_{T,1}\nu_{T,2}\right]$$

имеем

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}&(\nu_{T,0}^2 + \nu_{T,1}^2 + \nu_{T,2}^2)\\ &\le 2\nu_{T,0}^2 + 2\nu_{T,1}^2 + 2\nu_{T,2}^2 + \nu_{T,0}\nu_{T,1} + \nu_{T,0}\nu_{T,2} + \nu_{T,1}\nu_{T,2}\\ &\le 3(\nu_{T,0}^2 + \nu_{T,1}^2 + \nu_{T,2}^2).\end{aligned}$$

Поскольку $2mT = a_T b_T \sin\phi_T$, найдем

$$\frac{mT}{16}(\nu_{T,0}^2 + \nu_{T,1}^2 + \nu_{T,2}^2) \le \int_T (\tilde{u})^2\,dx \le \frac{mT}{8}(\nu_{T,0}^2 + \nu_{T,1}^2 + \nu_{T,2}^2). \tag{2.9}$$

Ввиду проведенных рассуждений, границы в неравенстве (2.9) достигаются. Если x_j — перенумерованные узлы, а ν_j — соответствующие значения сеточной функции, $\nu(x_j) = \nu_j$, то после суммирования в неравенстве (2.9) по всем треугольникам из $\tilde{\Omega}$ получим

$$\frac{1}{16}\sum_j\Bigl(\sum_{T\in\zeta(x_j)} mT\Bigr)\nu_j^2 \le \int_{\tilde{\Omega}} (\tilde{u})^2\,dx < \frac{1}{8}\sum_j\Bigl(\sum_{T\in\zeta(x_j)} mT\Bigr)\nu_j^2, \tag{2.10}$$

откуда

$$\frac{1}{16}\sum_j m\zeta_j\nu_j^2 \le \int_{\tilde{\Omega}} (\tilde{u})^2\,dx < \frac{1}{8}\sum_j m\zeta_j\nu_j^2. \tag{2.11}$$

Лемма доказана. □

3. Константы устойчивости курантовской аппроксимации в пространстве W_2^1

В этом параграфе рассмотрим константы в метрике пространства W_2^1. Используя прежние обозначения, найдем

$$\int_\Omega (\nabla\tilde{u})^2\,dx\,dy = \sum_{T\in\tilde{\Omega}}\left[\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}\right)^2\right],$$

где

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} = \frac{\partial\tilde{u}}{\partial x'}\cdot\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial\tilde{u}}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial x}; \qquad \frac{\partial\tilde{u}}{\partial y} = \frac{\partial\tilde{u}}{\partial x'}\cdot\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial\tilde{u}}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial y}.$$

Сначала вычислим следующие интегралы

$$\iint_T \left[\frac{\partial z_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial z_j}{\partial x} + \frac{\partial z_i}{\partial y}\cdot\frac{\partial z_j}{\partial y}\right] dx\,dy, \qquad i,j = 0,1,2.$$

Очевидно

$$\frac{\partial z_i}{\partial x} = \frac{\partial z_i}{\partial x'}\cdot\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial z_i}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial x}; \qquad \frac{\partial z_i}{\partial y} = \frac{\partial z_i}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z_i}{\partial x'}\cdot\frac{\partial x'}{\partial y}. \tag{3.1}$$

Откуда, учитывая представления:$z_o = 1 - x' - y'$, $z_1 = x'$, $z_2 = y'$ и используя преобразование

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{a} - \frac{y}{a\tan\phi},\\ y' = 0\cdot x + \frac{y}{b\sin\phi},\end{cases}$$

имеем

$$\begin{aligned}&\frac{\partial z_0}{\partial x'}=-1,\quad \frac{\partial z_1}{\partial x'}=1,\quad \frac{\partial z_2}{\partial x'}=0,\quad \frac{\partial z_0}{\partial x}=-\frac{1}{a},\\ &\frac{\partial z_1}{\partial x}=\frac{1}{a},\quad \frac{\partial z_2}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial x}{\partial x'}=a,\quad \frac{\partial y'}{\partial x}=0,\\ &\frac{\partial z_0}{\partial y'}=-1,\quad \frac{\partial z_1}{\partial y'}=0,\quad \frac{\partial z_2}{\partial y'}=1,\quad \frac{\partial z_0}{\partial y}=\frac{b\cos\phi-a}{ab\sin\phi},\\ &\frac{\partial z_1}{\partial y}=-\frac{1}{a\tan\phi},\quad \frac{\partial z_2}{\partial y}=\frac{1}{b\sin\phi},\quad \frac{\partial x'}{\partial y}=-\frac{1}{a\tan\phi},\quad \frac{\partial y'}{\partial y}=\frac{1}{b\sin\phi}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Введем обозначение

$$[z_i,z_j]=\iint\limits_T\left[\frac{\partial z_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial z_j}{\partial x}+\frac{\partial z_i}{\partial y}\cdot\frac{\partial z_j}{\partial y}\right]dx\,dy,\qquad i,j=0,1,2.$$

Используя (3.1), (3.2) находим интересующие нас интегралы

$$\begin{aligned}&[z_0,z_0]=\frac{a^2+b^2-2ab\cos\phi}{2ab\sin\phi},\quad [z_1,z_1]=\frac{b\cos^2\phi(1+\tan^2\phi)}{2a\sin\phi}=\frac{b}{2a\sin\phi},\\ &[z_2,z_2]=\frac{a}{2b\sin\phi},[z_1,z_2]=-\frac{1}{2\tan\phi},\\ &[z_0,z_1]=\frac{a\cos\phi-b}{2a\sin\phi},\quad [z_0,z_2]=\frac{b\cos\phi-a}{2b\sin\phi}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Введем обозначения: S_T — площадь треугольника, h_i — высота, проведенная из i-той вершины на противоположную сторону, n_i —единичная нормаль к стороне, противоположной вершине i, $\|n_i\|=1$.

Лемма 2. *При введенных выше обозначениях интегралы* (3.3) *вычисляются по формулам*

$$[z_p,z_q]=\frac{S_T\cos(n_p,n_q)}{h_h h_q},\qquad \|n_p\|=\|n_q\|=1.\tag{3.4}$$

Доказательство. Используя прежние обозначения (смотри начало предыдущего параграфа), напомним, что $|OA|=b$, $|OB|=a$. Опуская высоты BD, OE и AC на стороны OA, AB, OB соответственно, найдем $|BD|=h_1$, $|OE|=h_0$, $|AC|=h_2$. Из треугольника T видно: $h_1=a\sin\phi$, $h_2=b\sin\phi$, $h_0=ab\sin\phi(a^2+b^2-2ab\cos\phi)$. Подставляя эти значения в формулу (3.3), при $p=q$ имеем $\cos(n_p,n_q)=1$, и поэтому получаем

$$[z_0,z_0]=\frac{S_T}{h_0^2},\qquad [z_1,z_1]=\frac{S_T}{h_1^2},\qquad [z_2,z_2]=\frac{S_T}{h_2^2}.$$

Рассмотрим случай, когда $p=q$. Найдем n_0, n_0 — нормаль к стороне AB. Из уравнения прямой AB

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

подстановкой значений $x_1=a$, $y_1=0$, $x_2=b\cos\phi$, $y_2=b\sin\phi$, найдем $\frac{x-a}{b\cos\phi-a}=\frac{y}{b\sin\phi}$. Отсюда $b\sin\phi(x-a)+(a-b\cos\phi)y=0$ и далее $n_0=(b\sin\phi,a-b\cos\phi)$.

Аналогично находим n_1. Из уравнений прямой OA $y_2x-x_2y=0$, получаем $n_1=(y_2,-x_2)=(b\sin\phi,-b\cos\phi)$,

$$\cos(n_0,n_1)=\frac{b^2\sin^2\phi-b\cos\phi(a-b\cos\phi)}{b\big(b^2\sin^2\phi+(a-b\cos\phi)^2\big)^{\frac12}}=\frac{b-a\cos\phi}{\big(b^2+a^2-2ab\cos\phi\big)^{\frac12}}.$$

Учитывая, что $h_0 = ab\sin\phi(a^2+b^2-2ab\cos\phi)$, и используя (3.4), получаем

$$[z_0,z_1] = \frac{1}{2}\cdot\frac{ab\sin\phi(b-a\cos\phi)}{a\sin\phi h_0\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\phi}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{b-a\cos\phi}{a\sin\phi},$$

что соответствует формулам (3.3). Аналогичные рассуждения для $[z_1,z_2]$ и $[z_0,z_2]$ дают остальные утверждения (3.4). Лемма доказана. □

Введем подпространство $V_0^{(T)}$, $V_0^{(T)} = \{\nu/\nu = C(1,1,1),\ C\in R^1\}$.

Лемма 3 (О границах квадратичной формы $|\tilde{u}|^2$). *Для векторов (ν_0,ν_1,ν_2), ортогональных подпространству $V_0^{(T)}$, справедливы неравенства*

$$\lambda_1^T\sum_{i=0}^{2}\nu_i^2 \le \sum_{i,j=0}^{2}\nu_i\nu_j\,[w_j,w_i]_T \le \lambda_2^T\sum_{i=0}^{2}\nu_i^2, \tag{3.5}$$

$$\lambda_{1,2}^T = \frac{\tilde{a}^2+\tilde{b}^2+\tilde{c}^2}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{(\tilde{a}^2+\tilde{b}^2+\tilde{c}^2)^2-3}, \tag{3.6}$$

$$\tilde{a}^2 = \frac{S_T}{h_0^2},\qquad \tilde{b}^2 = \frac{S_T}{h_1^2},\qquad \tilde{c}^2 = \frac{S_T}{h_2^2}.$$

Неравенства (3.5) *являются точными.*

Доказательство. Для доказательства удобно ввести обозначения α, β, γ для углов треугольника T: $\angle(n_0,n_1)=\gamma$, $\angle(n_1,n_2)=\alpha$, $\angle(n_0,n_2)=\beta$. Ввиду этих обозначений ясно, что высоты h_0, h_1, h_2 соответствуют углам α, β, γ. Тогда квадратичная форма $|\tilde{u}|_T^2$ имеет матрицу

$$\bar{A} = \begin{vmatrix} \tilde{a}^2 & -\tilde{a}\tilde{b}\cos\gamma & -\tilde{a}\tilde{c}\cos\beta \\ -\tilde{a}\tilde{b}\cos\gamma & \tilde{b}^2 & -\tilde{b}\tilde{c}\cos\alpha \\ -\tilde{a}\tilde{c}\cos\beta & -\tilde{b}\tilde{c}\cos\alpha & \tilde{c}^2 \end{vmatrix}.$$

Найдем собственные числа этой матрицы. Для этого решим уравнение
$|\bar{A}-\lambda E| = 0$, откуда

$$\lambda_{1,2}^T = \frac{\tilde{a}^2+\tilde{b}^2+\tilde{c}^2}{2} \mp \sqrt{\frac{\tilde{a}^4+\tilde{b}^4+\tilde{c}^4}{4} + \frac{\tilde{a}^2\tilde{b}^2\cos 2\gamma}{2} + \frac{\tilde{b}^2\tilde{c}^2\cos 2\alpha}{2} + \frac{\tilde{a}^2\tilde{c}^2\cos 2\beta}{2}}.$$

Пусть a, b, c — стороны треугольника T, противолежащие углам α, β, γ соответственно. Тогда $a = 2S_T/h_0$, $b = 2S_T/h_1$, $c = 2S_T/h_2$, с другой стороны $h_0 = b\sin\gamma$, $h_1 = c\sin\alpha$, $h_2 = a\sin\beta$. Отсюда

$$\sin\gamma = \frac{h_0}{b} = \frac{h_1h_0}{2S_T} = \frac{1}{2\tilde{a}\tilde{b}};\quad \sin\beta = \frac{h_2}{a} = \frac{h_2h_0}{2S_T} = \frac{1}{2\tilde{a}\tilde{c}};$$

$$\sin\alpha = \frac{h_1}{c} = \frac{h_1h_2}{2S_T} = \frac{1}{2\tilde{b}\tilde{c}}.$$

Используя известные формулы тригонометрии, легко получить

$$\cos 2\alpha = \frac{1-h_1^2h_2^2}{2S_T} = 1-\frac{1}{2\tilde{b}^2\tilde{c}^2} = \frac{2\tilde{b}^2\tilde{c}^2-1}{2\tilde{b}^2\tilde{c}^2};$$

$$\cos 2\beta = 1-\frac{1}{2\tilde{a}^2\tilde{c}^2};\quad \cos 2\gamma = 1-\frac{1}{2\tilde{a}^2\tilde{b}^2}.$$

Подставляя эти соотношения в формулу для λ^T, находим

$$\lambda_{1,2}^T = \frac{\tilde{a}^2+\tilde{b}^2+\tilde{c}^2}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{(\tilde{a}^2+\tilde{b}^2+\tilde{c}^2)^2-3}.$$

Неравенства (3.5) доказаны. Их точность вытекает из метода доказательства. Лемма доказана. □

Лемма 4. *Для произвольных векторов* $\nu = (\nu_0, \nu_1, \nu_2)$ *справедливы следующие неравенства*

$$\frac{2}{3}\lambda_1^T\left[(\nu_1-\nu_0)^2+(\nu_2-\nu_0)^2-(\nu_1-\nu_0)(\nu_2-\nu_0)\right]$$
$$\le \sum_{i,j=0}^{2}\nu_i\nu_j\left[w_j,w_i\right] \le \frac{2}{3}\lambda_2^T\left[(\nu_1-\nu_0)^2+(\nu_2-\nu_0)^2-(\nu_1-\nu_0)(\nu_2-\nu_0)\right],$$

где числа λ_1^T *и* λ_2^T *даются формулами* (3.6).

Доказательство. Используя прежние обозначения для собственных чисел $0 = \lambda_0^T < \lambda_1^T < \lambda_2^T$ матрицы A квадратичной формы $(\bar{A}\nu,\nu)\overset{def}{=}|\tilde{u}|_T^2$, $\nu = (\nu_0,\nu_1,\nu_2)$ введем в рассмотрение соответствующие им ортонормированные векторы-столбцы $\nu^{(0)}$, $\nu^{(1)}$, $\nu^{(2)}$, так что $\bar{A}\nu^{(i)} = \lambda_i\nu_i$, $i = 1,2,3$. Очевидно,

$$\nu^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим ортогональную матрицу V, составленную из упомянутых столбцов, и зададим вектор $x = (x_0,x_1,x_2)$ формулой $\nu = Vx$, то есть $\nu = x_0\nu^{(0)}+x_1\nu^{(1)}+x_2\nu^{(2)}$. Тогда $(\bar{A}\nu,\nu) = (V^*\bar{A}Vx,x) = \lambda_0^T x_0^2+\lambda_1^T x_1^2+\lambda_1^T x_2^2$. С учетом равенства $\lambda_0^T = 0$ отсюда найдем

$$\lambda_1^T(x_1^2+x_2^2) \le (\bar{A}\nu,\nu) \le \lambda_2^T(x_1^2+x_2^2). \tag{3.8}$$

Используя ортонормированность векторов $\nu^{(0)}$, $\nu^{(1)}$, $\nu^{(2)}$, получим $x_i = (\nu_i x_i)$, $i = 0,1,2$, а также соотношения $\nu-(\nu,\nu^{(0)})\nu^{(0)} \perp V_0^{(T)}$. Итак, неравенства (3.8) можно переписать в виде

$$\lambda_1^T\|\nu-(\nu,\nu^{(0)})\nu^{(0)}\|^2 \le (\bar{A}\nu,\nu) \le \lambda_2^T\|\nu-(\nu,\nu^{(0)})\nu^{(0)}\|^2. \tag{3.9}$$

Заметим, что для векторов ν, ортогональных подпространству $V_0^{(T)}$ из (3.9) получаем прежнее неравенство (3.5)

$$\left\|\nu-(\nu,\nu^{(0)})\nu^{(0)}\right\|^2 = \|\nu\|^2 - |\nu,\nu^{(0)}|^2 = \nu_0^2+\nu_1^2+\nu_2^2-\frac{1}{3}(\nu_0+\nu_1+\nu_2)^2$$
$$= \frac{2}{3}(\nu_0^2+\nu_1^2+\nu_2^2-\nu_0\nu_1-\nu_0\nu_2-\nu_1\nu_2).$$

Конечно, в последней формуле ν можно заменить на $\nu - c\sqrt{3}\cdot\nu^{(0)}$, где c — любое вещественное число, тогда

$$\left\|\nu-(\nu,\nu^{(0)})\nu^{(0)}\right\|^2 = \left\|\nu-c\sqrt{3}\nu^{(0)}-(\nu-c\sqrt{3}\nu^{(0)},\nu^{(0)})\nu^{(0)}\right\|^2$$
$$= \frac{2}{3}\left[(\nu_0-c)^2+(\nu_1-c)^2+(\nu_2-c)^2-(\nu_0-c)(\nu_1-c)\right.$$
$$\left.-(\nu_0-c)(\nu_2-c)-(\nu_1-c)(\nu_2-c)\right].$$

Полагая здесь $c = \nu_0$, найдем

$$\left\|\nu-(\nu,\nu^{(0)})\nu^{(0)}\right\|^2 = \frac{2}{3}[(\nu_1-\nu_0)^2+(\nu_2-\nu_0)^2-(\nu_1-\nu_0)(\nu_2-c)].$$

Подставляя это в неравенство (3.9), получим оценку (3.7). Точность этой оценки очевидна. Лемма доказана. □

Следствие 1. *Справедливы неравенства*

$$\frac{1}{3}\lambda_1^T\left[(\nu_1-\nu_0)^2+(\nu_2-\nu_0)^2\right] \le \sum_{i,j=0}^{2} \nu_i\nu_j\left[w_i,w_j\right] \le \lambda_2^T\left[(\nu_1-\nu_0)^2+(\nu_2-\nu_0)^2\right], \quad (3.10)$$

где числа λ_1^T *и* λ_2^T *определены равенствами* (3.6).

Доказательство очевидно.

Далее $\tilde{\Omega}$ означает введенный ранее триангулированный многоугольник, для краткости через $\tilde{\Omega}$ обозначаем также множество всех треугольников рассматриваемой триангуляции. Пусть $V_0 = \{c\nu_0/\nu_0(\xi_j) = 1, j = 1,\dots,N\}$.

Лемма 5. *Для сеточных функций* ν, *ортогональных подпространству* V_0, *справедливы неравенства*

$$\bar{\lambda}\sum_{j=1}^{N}\nu_j^2 \le \int_{\tilde{\Omega}}(\nabla\tilde{u})^2\,dx \le \bar{\bar{\lambda}}\sum_{j=1}^{N}\nu_j^2, \quad (3.12)$$

где

$$\bar{\lambda} = \min_{T\in\tilde{\Omega}}\lambda_1^T, \qquad \bar{\bar{\lambda}} = \max_{T\in\tilde{\Omega}}\lambda_2^T, \quad (3.13)$$

Доказательство легко получается суммированием неравенств (3.5) по всем треугольникам $T\subset\tilde{\Omega}$.

Аналогично из (3.10) получается

Лемма 6. *Для произвольных сеточных функций* ν *справедливы неравенства*

$$\frac{4}{9}\bar{\lambda}\sum_{i,j}(\nu_i-\nu_j)^2 \le \int_{\tilde{\Omega}}(\nabla\tilde{u})^2\,dx \le \frac{4}{3}\bar{\bar{\lambda}}\sum_{i,j}(\nu_i-\nu_j)^2, \quad (3.14)$$

где $\bar{\lambda}$ *и* $\bar{\bar{\lambda}}$ *те же константы, что и в лемме* 5, *а сумма* $\sum_{i,j}$ *означает суммирование по всем ребрам* l_{ij} *триангуляции с концами в вершинах* ξ_i *и* ξ_j.

Доказательство. Из неравенства (3.10) для $T\subset\tilde{\Omega}$ получим

$$\frac{1}{3}\bar{\lambda}\left[(\nu_1-\nu_0)^2+(\nu_2-\nu_0)^2\right] \le \sum_{i,j=0}^{2}\nu_i\nu_j\left[w_i,w_j\right] \le \bar{\bar{\lambda}}\left[(\nu_1-\nu_0)^2+(\nu_2-\nu_0)^2\right].$$

Учитывая равноправность вершин треугольника, перестановкой номеров отсюда получаем еще два неравенства

$$\frac{1}{3}\bar{\lambda}\left[(\nu_0-\nu_1)^2+(\nu_2-\nu_1)^2\right] \le \sum_{i,j=0}^{2}\nu_i\nu_j\left[w_i,w_j\right] \le \bar{\bar{\lambda}}\left[(\nu_0-\nu_1)^2+(\nu_2-\nu_1)^2\right],$$

$$\frac{1}{3}\bar{\lambda}\left[(\nu_0-\nu_2)^2+(\nu_1-\nu_2)^2\right] \le \sum_{i,j=0}^{2}\nu_i\nu_j\left[w_i,w_j\right] \le \bar{\bar{\lambda}}\left[(\nu_0-\nu_2)^2+(\nu_1-\nu_2)^2\right].$$

Складывая эти два неравенства и деля на три, найдем

$$\frac{2}{9}\bar{\lambda}\left[(\nu_0-\nu_1)^2+(\nu_2-\nu_1)^2+(\nu_2-\nu_0)^2\right] \le \sum_{i,j=0}^{2}\nu_i\nu_j\left[w_i,w_j\right]$$
$$\le \frac{2}{3}\bar{\bar{\lambda}}\left[(\nu_0-\nu_1)^2+(\nu_2-\nu_1)^2+(\nu_2-\nu_0)^2\right].$$

Суммируя полученные соотношения по всем треугольникам триангуляции $\tilde{\Omega}$ и учитывая, что каждое ребро при таком суммировании встретится два раза, окончательно получим неравенства (3.14). Лемма доказана. □

Замечание. В случае одинаковых треугольников в лемме 5 неравенства (3.12) точны (это следует из точности неравенств в лемме 3). Если не переходить к граням (3.13) для $\lambda_{1,2}^T$, то суммированием (3.5) получим весовые оценки, в которых треугольникам T приписаны веса $\lambda_{1,2}^T$.

4. Некоторые асимптотики при вырождении треугольников

Здесь будут рассмотрены случаи вырожденных треугольников: случай вырожденного прямоугольного треугольника при стремлении одного из острых углов к 0, случай вырожденного равнобедренного треугольника при стремлении к 0 угла при вершине и случай равнобедренного треугольника, когда два угла при основании стремятся к 0, а также два более общих случая (случай, когда один угол стремится к 0, а два других стремятся к отличным от 0 пределам, и случай стремления к 0 двух углов).

В дальнейшем мы по-прежнему используем обозначения, введенные в параграфах 2 и 3.

4.1. Случай прямоугольного треугольника.

Из треугольника T имеем: $\alpha = \pi/2$, $\tan\gamma = h_1/h_2$, $\tan\beta = h_2/h_1$, $h_0 = h_1\cos\gamma$. С помощью известных формул тригонометрии получаем

$$\cos 2\beta = \frac{1-\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta} = \frac{h_2^2 - h_1^2}{h_1^2 + h_2^2}; \qquad \cos 2\gamma = \frac{h_2^2 - h_1^2}{h_1^2 + h_2^2};$$
$$\cos^2\gamma = \frac{1}{1+\tan^2\gamma} = \frac{h_2^2}{h_1^2 + h_2^2}.$$

Тогда формула (3.6) примет вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{h_1}{h_2} + \frac{h_2}{h_1}\right) \mp \left(\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

В случае равнобедренного прямоугольного треугольника ($\alpha = \pi/2$, $\beta = \pi/4$, $\gamma = \pi/4$) получаем следующие значения собственных чисел: $\lambda_1 = 1/2$, $\lambda_2 = 3/2$.

Из математического анализа известно, что $\tan\gamma$ и γ эквивалентные бесконечно малые (при $\gamma \to 0$): $\tan\gamma \sim \gamma \to 0$, поэтому

$$\lambda_{1,2} \sim \frac{1}{2}\left\{\frac{\gamma+1}{\gamma} \mp \left(\gamma^2 + \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}}\right\},$$

отсюда

$$\lambda_1 \sim \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}\sqrt{1-\gamma^2}\right\} \sim \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}\left(1 - \frac{\gamma^2}{2}\right)\right\},$$

то-есть, $\lambda_1 \sim \gamma/4$, $\gamma \to 0$. Нетрудно показать, что

$$\lambda_2 \sim \frac{1}{2}\left\{\gamma + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma}\cdot\left(1 - \frac{\gamma^2}{2}\right)\right\} \sim \frac{1}{\gamma},$$

то-есть собственное число неограниченно растет, и порядок его роста $1/\gamma$, $\gamma \to 0$.

4.2. Случай равнобедренного треугольника.

Напомним введенные раньше соотношения:
$\sin\alpha = 1/(2\tilde{b}\tilde{c})$, $\sin\beta = 1/(2\tilde{a}\tilde{c})$, $\sin\gamma = 1/(2\tilde{a}\tilde{b})$, откуда

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}, \qquad \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{\tilde{b}}{\tilde{c}}, \qquad \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{\tilde{a}}{\tilde{c}}$$

или

$$\frac{\sin\alpha}{\tilde{a}} = \frac{\sin\beta}{\tilde{b}} = \frac{\sin\gamma}{\tilde{c}} = \frac{1}{\eta}.$$

Таким образом, $\tilde{a} = \eta\sin\alpha$, $\tilde{b} = \eta\sin\beta$, $\tilde{c} = \eta\sin\gamma$, где

$$\eta = \frac{1}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}.$$

Итак,

$$\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2 + \tilde{c}^2 = \frac{\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}. \tag{4.1}$$

а). Рассмотрим случай, когда треугольник равнобедренный и угол при вершине стремится к 0, боковые стороны равны фиксированному числу $h > 0$. Для определенности будем считать $\alpha \to 0$, $\beta = \gamma \to \pi/2$. Тогда $\beta = \gamma = \pi/2 - \alpha/2$ и из формулы (4.1) найдем

$$\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2 + \tilde{c}^2 = \frac{\sin^2\alpha + 2\cos^2(\alpha/2)}{2\sin\alpha\cos^2(\alpha/2)} \cdot \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{2\cos^2(\alpha/2)} \sim \frac{1}{\alpha}. \tag{4.2}$$

Формула (3.6) примет вид

$$\lambda_{1,2} \sim \frac{1}{2\alpha}\left(1 \mp \left(1 - \frac{3}{2}\alpha^2\right)\right),$$

откуда

$$\lambda_1 \sim \frac{3}{4}\alpha, \qquad \lambda_2 \sim \frac{1}{\alpha}, \qquad \alpha \to 0. \tag{4.3}$$

б). Теперь рассмотрим случай, когда треугольник равнобедренный и два угла стремятся к 0, а угол при вершине стремится к π. Пусть $\beta = \gamma \to 0$, $\alpha = \pi - 2\beta$. Тогда из формулы (4.1) получаем

$$\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2 + \tilde{c}^2 = \cot\beta + \frac{1}{\sin 2\beta} \sim \frac{3}{2\beta}. \tag{4.4}$$

Следовательно, формула (3.6) примет форму

$$\lambda_{1,2} \sim \frac{3}{4\beta}\left(1 \mp \left(1 - \frac{4}{3}\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}\right),$$

откуда

$$\lambda_1 \sim \frac{1}{2}\beta, \qquad \lambda_2 \sim \frac{3}{2\beta}, \qquad \beta \to 0. \tag{4.5}$$

4.3. Случай более общего соотношения между углами.

а). Рассмотрим случай, когда один угол стремится к 0, а два других стремятся к отличным от 0 пределам. Для определенности будем считать $\alpha \to 0$, $\beta \to \beta_0 \neq 0$, $\gamma \to \gamma_0 \neq 0$, $\gamma_0 = \pi - \beta_0$, тогда

$$\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2 + \tilde{c}^2 \sim \frac{\sin^2\beta_0 + \sin^2\gamma_0}{2\alpha\sin\beta_0\sin\gamma_0} \sim \frac{1}{\alpha}.$$

Таким образом, формула (4.2) при $\alpha \to 0$, $\beta = \gamma \to \pi/2$ является частным случаем полученного здесь результата.

б). Рассмотрим случай стремления к 0 двух углов. Пусть $\gamma \to 0$, $\beta = c\gamma$, где c — некоторая положительная константа. Тогда $\pi - \alpha \to 0$ и потому $\sin\alpha = \sin(\pi-\alpha) \sim \pi - \alpha$. Поскольку $\alpha+\beta+\gamma = \pi$, то $\pi - \alpha = (c+1)\gamma$. Теперь формула (4.1) приводит к представлению

$$\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2 + \tilde{c}^2 \sim \frac{(\pi-\alpha)^2 + (c\gamma)^2 + \gamma^2}{2(c+1)\gamma \cdot c\gamma \cdot \gamma} = \frac{2\gamma^2(c^2+c+1)}{2c(c+1)\gamma^3}.$$

Отсюда находим

$$\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2 + \tilde{c}^2 \sim \frac{c^2+c+1}{c(c+1)} \cdot \frac{1}{\gamma}.$$

Отметим, что при $c = 1$ получается формула (4.4).

Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 7. *Пусть λ_1 и λ_2 определяются формулой* (3.6).

1). *Если $\alpha \to 0$, $\beta \to \beta_0$, $\gamma \to \gamma_0$, $\beta_0 + \gamma_0 = \pi$, $\beta_0 > 0$, $\gamma_0 > 0$, то для собственных чисел λ_1 и λ_2 справедливы асимптотические представления:*

$$\lambda_1 = \frac{3}{4}\alpha + O(\alpha^3), \qquad \lambda_2 = \frac{1}{\alpha} + O(\alpha).$$

2). *Если $\beta = c\gamma$, $\gamma \to 0$, $c = const > 0$, $\alpha \to \pi$, то для λ_1 и λ_2 верны асимптотические представления:*

$$\lambda_1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{c(c+1)}{c^2+c+1} + O(\gamma^3), \qquad \lambda_2 = \frac{c^2+c+1}{c(c+1)} + O(\gamma).$$

Литература

1. Ю. К. Демьянович, *Аппроксимация локальными функциями и вариационно-разностные методы*, “Изд-во ЛГУ”, Ленинград, 1987.
2. С. Г. Михлин, *Численная реализация вариационных методов*, Москва, 1966.
3. Е. К. Чистов, *Устойчивость вариационно-сеточного процесса на симплектических сетках*, Известия ВУЗов (1982), № 4, 64–67.
4. А. А. Самарский, Р. Д. Лазаров, В. Л. Макаров, *Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями*, “Высшая школа”, Москва, 1987.
5. А. А. Самарский, Е. С. Николаев, *Методы решения сеточных уравнений*, “Мир”, Москва, 1978.
6. І. П. Гаврилюк, В. Л. Макаров, *Методи обчислень*, ”Вища школа”, Київ, 1995.

КИЕВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Т. ШЕВЧЕНКО, ФАКУЛЬТЕТ КИБЕРНЕТИКИ, 252601, КИЕВ, УЛ. ВЛАДИМИРСКАЯ, 64

Поступила 12.05.97