Обчислювальна та прикладна математика
Вип. 82, 1997, стор. 69–74

Computational and Applied Mathematics
No. 82, 1997, pp. 69–74

FD-МЕТОД — ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ

УДК 519.63

В. Л. МАКАРОВ

РЕЗЮМЕ. В работе излагается функционально-дискретный метод (FD-метод) для решения операторных уравнений и абстрактных задач на собственные значения. Алгоритм метода включает в себя рекуррентное решение последовательности задач с фиксированным оператором, более "простым" по сравнению с исходным, и изменяющейся правой частью. Доказывается при достаточно общих предположениях, что FD-метод сходится со скоростью геометрической прогрессии, т.е. имеет экспоненциальную скорость сходимости.

В работе излагается функционально-дискретный метод (FD-метод) для решения операторных уравнений и абстрактных задач на собственные значения. Алгоритм метода включает в себя рекуррентное решение последовательности задач с фиксированным оператором, более "простым" по сравнению с исходным, и изменяющейся правой частью. Доказывается при достаточно общих предположениях, что FD-метод сходится со скоростью геометрической прогрессии, т.е. имеет экспоненциальную скорость сходимости. Основные идеи FD-метода впервые были изложены в [1,2], где он был применен для решения краевых задач для ОДУ второго порядка, интегральных уравнений и задач Штурма–Лиувилля. Дальнейшее развитие FD-метод получил в работах [3–5] при решении сингулярно возмущенных ОДУ второго порядка и их систем, а также при решении гиперболических уравнений первого порядка.

Структурно работа состоит из трех параграфов. В первом параграфе излагается FD-метод для решения операторных уравнений в банаховом пространстве. Параграф 2 посвящен двустороннему FD-методу для решения операторных уравнений в правильном конусе. Задача о собственных векторах и собственных значениях самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве рассмотрена в параграфе 3.

1. FD-МЕТОД В РЕШЕНИИ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть дано уравнение

$$(A+B)u = f, \tag{1.1}$$

где A, B — линейные операторы, действующие из банахового пространства X в X, f — заданный элемент из X, u — искомый.

Работа была выполнена при поддержке Международной Соросовской программы ISSEP, грант SPU041042.

Введем операторно-значную функцию

$$W(t) = \bar{B} + t(B - \bar{B}), \qquad t \in [0,1], \tag{1.2}$$

где $\bar{B}$ — оператор близкий в определенном смысле к B, действующий из X в X, и погрузим уравнения (1.1) в более общие уравнения

$$[A + W(t)]u(t) = f. \tag{1.3}$$

Очевидно, что

$$u(1) = u. \tag{1.4}$$

Будем искать решение уравнения (1.1) через уравнение (1.3) в виде ряда

$$u = u(1) = \sum_{j=0}^{\infty} u^{(j)}, \tag{1.5}$$

где

$$u^{(j)} = \frac{1}{j!} \frac{d^j(t)}{dt^j}\bigg|_{t=0}.$$

Причем $u^{(j)}$ определяются из рекуррентной системы

$$\begin{aligned} &(A + \bar{B})u^{(j+1)} = -(B - \bar{B})u^{(j)}, \qquad j = 0, 1, \ldots, \\ &(A + \bar{B})u^{(0)} = f. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Имеет место

Теорема 1.1. *Пусть* $\overline{D(A)} = X$, *операторы* B, $\bar{B}$ *— ограничены,* A *— замкнутый оператор,* $\exists (A + \bar{B})^{-1}$. *Если*

$$q = \left\|(A + \bar{B})^{-1}(B - \bar{B})\right\| < 1,$$

то ряд (1.5) *сходится к* u *не медленнее геометрической прогрессии со знаменателем* q, *т.е. имеет экспоненциальную скорость сходимости. Имеет место оценка*

$$\left\|u - \sum_{j=0}^{m} u^{(j)}\right\| \le \frac{q^{m+1}}{1-q}\|u^{(0)}\|. \tag{1.7}$$

Доказательство. Из условий теоремы и (1.6) вытекает, что

$$\|u^{(j+1)}\| \le q\|u^{(j)}\| \le \cdots \le q^{(j+1)}\|u^{(0)}\|.$$

Обозначим

$$\overset{m}{u} = \sum_{j=0}^{m} u^{(j)}, \qquad \hat{u} = \lim_{m\to\infty} \overset{m}{u} = \sum_{j=0}^{\infty} u^{(j)}.$$

Тогда

$$(A + \bar{B})\overset{m}{u} = -(B - \bar{B})\overset{m-1}{u} + f \tag{1.8}$$

и, переходя в (1.8) к пределу, когда $m \to \infty$, из замкнутости операторов $A + \bar{B}$ и $B - \bar{B}$ получим

$$(A + \bar{B})\hat{u} = -(B - \bar{B})\hat{u} + f$$

или

$$(A + \bar{B})\hat{u} = f.$$

В силу единственности решения уравнения (1.1) получим

$$u = \bar{u}.$$

Справедливость оценки (1.7) очевидна. Теорема доказана. □

2. Двусторонний FD-метод

Имеет место

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1. *Пусть* $K \subset D(A)$ *правильный конус,* $f \in K$, *операторы* $I - (B - \bar{B})(A + \bar{B})^{-1}$, $(A + \bar{B})^{-1}(B - \bar{B})$ *являются положительными. Тогда последовательность*

$$\overset{2m-1}{u} = \sum_{j=0}^{2m-1} u^{(j)} \tag{2.1}$$

является монотонно возрастающей, а последовательность

$$\overset{2m}{u} = \sum_{j=0}^{2m} u^{(j)} \tag{2.2}$$

монотонно убывающей. Обе последовательности сходятся к решению задачи (1.1) *со скоростью геометрической прогрессии, причем*

$$\overset{2m-1}{u} \preceq u \preceq \overset{2m}{u}, \tag{2.3}$$

$$0 \preceq u - \overset{2m-1}{u} \preceq u^{(2m)}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Из условий теоремы по индукции доказывается, что

$$(-1)^j u^{(j)} \succeq 0,$$
$$(-1)^j [u^{(j+1)} + u^{(j)}] \succeq 0, \qquad \forall j = 0, 1, \ldots .$$

Отсюда следует, что

$$\overset{2m-1}{u} \preceq \overset{2m+1}{u}, \qquad m = 1, 2, \ldots,$$
$$\overset{2m}{u} \succeq \overset{2m+2}{u}, \qquad m = 0, 1, \ldots,$$
$$\overset{2m-1}{u} \preceq \overset{2m}{u}, \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

т.е. последовательность $\{\overset{2m-1}{u}\}_{m=1,2,\ldots}$ монотонно возрастает и ограничена сверху, а последовательность $\{\overset{2m}{u}\}_{m=0,1,\ldots}$ монотонно убывает и ограничена снизу. Поскольку конус K правильный, то обе последовательности сходятся по норме [6] соответственно к элементам $\underline{u}$, $\bar{u}$, каждый из которых является решением уравнения (1.1). Но уравнение (1.1) имеет единственное решение. Таким образом приходим к (2.3), (2.4). Геометрическая скорость сходимости очевидна. Теорема доказана. □

3. FD-метод в абстрактной проблеме собственных значений

Рассмотрим в гильбертовом пространстве H следующую задачу о собственных значениях

$$(A + B)u - \lambda u = \Theta, \tag{3.1}$$

где $A = A^* \geq 0$, $B = B^* \geq 0$, $\|B\| \leq K$, $\overline{D(A)} = H$, Θ — нуль-элемент пространства H, K — некоторая положительная постоянная. Решение задачи (3.1) ищем в виде

$$\lambda_n = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_n^{(j)} = \overset{m}{\lambda}_n + R_m(\lambda_n),$$
$$u_n = \sum_{j=0}^{\infty} u_n^{(j)} = \overset{m}{u}_n + R_m(u_n), \tag{3.2}$$

где

$$\overset{m}{\lambda}_n = \sum_{j=0}^{m} \lambda_n^{(j)}, \qquad R_m(\lambda_n) = \sum_{j=m+1}^{\infty} \lambda_n^{(j)},$$
$$\overset{m}{u}_n = \sum_{j=0}^{m} u_n^{(j)}, \qquad R_m(u_n) = \sum_{j=m+1}^{\infty} u_n^{(j)}, \quad n = 1, 2, \dots. \tag{3.3}$$

Общие члены рядов (3.2) определяются как решения последовательности уравнений

$$\begin{gathered}(A + \bar{B})u_n^{(j+1)} - \lambda_n^{(0)} u_n^{(j+1)} = -(B - \bar{B})u_n^{(0)} + \sum_{p=0}^{j} \lambda_n^{(j+1-p)} u_n^{(p)} \equiv F_n^{(j)},\\ \left(u_n^{(j+1)}, u_n^{(0)}\right) = 0,\\ \lambda_n^{(j+1)} = \left((B - \bar{B})u_n^{(j+1)}, u_n^{(0)}\right), \qquad j = 0, 1, \dots.\end{gathered} \tag{3.4}$$

Начальные значения $\lambda_n(0)$, $u_n^{(0)}$ для рекуррентного процесса (3.4) задаются как решение базовой задачи

$$(A + \bar{B})u_n^{(0)} - \lambda_n^{(0)} = 0, \qquad \left(u_n^{(0)}, u_n^{(0)}\right) = 1. \tag{3.5}$$

Здесь $\bar{B} = \bar{B}^* \geq 0$ оператор, близкий к оператору B и такой, что базовая задача (3.5) является более простой по сравнению с исходной задачей (3.1). Предложенный рекуррентный процесс (3.4), (3.5) является следствием FD-метода, примененного к (3.1) и описанного в параграфе 1.

Имеет место теорема

Теорема 3.1. *Пусть A замкнутый оператор, спектр задачи* (3.5) *дискретный*

$$0 \leq \lambda_1^{(0)} < \lambda_2^{(0)} < \dots,$$

а соответствующие собственные функции $\left\{u_n^{(0)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ образуют ортонормальный базис в H. Пусть выполнено условие

$$q_n = 4M_n\|B - \bar{B}\| < 1,$$

где

$$M_n = \max\left\{\frac{1}{\lambda_n^{(0)} - \lambda_{n-1}^{(0)}}, \frac{1}{\lambda_{n+1}^{(0)} - \lambda_n^{(0)}}\right\}.$$

Тогда ряды (3.3) *сходятся к соответствующему решению задачи* (3.1) *не медленнее, чем геометрическая прогрессия со знаменателем* q_n *и имеют место оценки*

$$\left\| u_n - \overset{m}{u}_n \right\| \leq \alpha_{m+1} \frac{q_n^{m+1}}{1-q_n},$$
$$\left| \lambda_n - \overset{m}{\lambda}_n \right| \leq \| B - \bar{B} \| \alpha_m \frac{q_n^m}{1-q_n}, \tag{3.6}$$

т.е. сходимость является экспоненциальной. Здесь

$$\alpha_m = 2\frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!!}.$$

При доказательстве теоремы используется следующее утверждение

Лемма 3.1. *Для решения рекуррентной системы неравенств*

$$g_{j+1} \leq \sum_{p=0}^{j} g_{j-p} g_p, \qquad j = 0, 1, \ldots, \qquad g_0 = 1,$$

имеет место оценка

$$g_j \leq 4^j \alpha_j, \qquad j = 1, 2, \ldots,$$

которая является неулучшаемой в том смысле, что

$$\lim_{j\to\infty} \frac{g_{j+1}}{g_j} = 4.$$

Доказательство теоремы 3.1. Отправляясь от $\left(\lambda_n(0), u_n^{(0)}\right)$, решения уравнений (3.4) можно представить в виде

$$u_n^{(j+1)} = -\sum_{\substack{p=1\\ p\neq n}} \frac{\left(F_n^{(j)}, u_p^{(0)}\right)}{\lambda_n^{(0)} - \lambda_p^{(0)}} u_p^{(0)}.$$

Отсюда следует оценка

$$\left\| u_n^{(j+1)} \right\| \leq M_n \left\| F_n^{(j)} \right\|,$$

которую с помощью неравенства

$$\begin{aligned} \left\| F_n^{(j)} \right\|^2 &= \left\| \sum_{p=1}^{j} \lambda_n^{(j+1-p)} u_n^{(p)} - (B-\bar{B}) u_n^{(j)} \right\|^2 - \left[\lambda_n^{(j+1)}\right]^2 \\ &\leq \left\| \sum_{p=1}^{j} \lambda_n^{(j+1-p)} u_n^{(p)} - (B-\bar{B}) u_n^{(j)} \right\|^2 \\ &\leq \| B - \bar{B} \| \left\{ \sum_{p=1}^{j} \left\| u_n^{(j-p)} \right\| \left\| u_n^{(p)} \right\| + \left\| u_n^{(j)} \right\| \right\}^2 \end{aligned}$$

можно представить в виде

$$\left\| u_n^{(j+1)} \right\| \leq M_n \| B - \bar{B} \| \sum_{p=0}^{j} \left\| u_n^{(j-p)} \right\| \left\| u_n^{(p)} \right\|.$$

Воспользовавшись леммой 3.1, получаем

$$\left\| u_n^{(j)} \right\| \leq q_n^j \alpha_j, \qquad \left| \lambda_n^{(j)} \right| \leq \| B - \bar{B} \| q_n^{j-1} \alpha_{j-1}. \tag{3.7}$$

Таким образом ряды (3.2) сходятся. Обозначим их суммы через $\hat{\lambda}_n$ и $\hat{u}_n$ соответственно. Из (3.4) имеем

$$(A+\bar{B})\overset{j+1}{u}_n = -(B-\bar{B})\overset{j}{\hat{u}}_n + \sum_{p=0}^{j+1}\sum_{k=0}^{p}\lambda_n^{(p+1-k)}u_n^{(k)}. \tag{3.8}$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части (3.8). С учетом (3.7) получаем

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{p=0}^{j+1}\sum_{k=0}^{p}\lambda_n^{(p+1-k)}u_n^{(k)} - \overset{j+1}{u}_n\overset{j+1}{\lambda}_n\right\| &= \left\|\sum_{p=1}^{j+1}u_n^{(p)}\sum_{k=j-p+2}^{j+1}\lambda_n^{(k)}\right\| \\ &\le \sum_{p=1}^{j+1}q_n^p\alpha_p\sum_{k=j-p+2}^{j+1}\|B-\bar{B}\|q_n^{k-1}\alpha_{k-1} \\ &\le \alpha_1^2\|B-\bar{B}\|\frac{q_n^{j-1}}{1-q_n}\left[j+1-q_n\frac{1-q_n^{j+1}}{1-q_n}\right]. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Перейдём в (3.8) к пределу, когда $j\to\infty$. Тогда, на основании условий теоремы и (3.9), будем иметь

$$(A+B)\hat{u}_n - \hat{\lambda}_n\hat{u}_n = \Theta,$$

т.е. $\hat{u}_n = u_n$, $\hat{\lambda}_n = \lambda_n$. Доказательство оценок (3.6) очевидно. Теорема доказана полностью. □

Результаты данного параграфа были получены совместно с О. Л. Уханевым.

Литература

1. В. Л. Макаров, *О функционально-дискретном подходе к решению задач математической физики*, Докл. расширенных заседаний семинара Ин-та прикладной математики им. И. Н. Векуа **6** (1991), № 3, 73–76.
2. В. Л. Макаров, *О функционально-разностном методе произвольного порядка точности решения задачи Штурма–Лиувилля с кусочно-гладкими коэффициентами*, ДАН СССР **320** (1991), № 1, 34–39.
3. В. Л. Макаров, В. В. Винокур, *FD-метод для лінійних гіперболічних диференціальних рівнянь першого порядку з кусково-гладкими коефіцієнтами*, Обчисл. та прикл. матем. (1993), № 77, 1–11.
4. В. Л. Макаров, В. В. Гуминский, *FD-схемы любого порядка точности для сингулярно возмущенных систем ОДУ второго порядка с кусочно-гладкими коэффициентами*, ДУ **30** (1994), № 3, 292–301.
5. Л. Д. Греков, В. М. Красников, *Компактні схеми високого порядку точності для ЗДР другого порядку з сингулярностями в коефіцієнтах*, Обчисл. та прикл. матем. (1993), № 77, 55–60.
6. М. А. Красносельский, Г. М. Вайнико, П. П. Забрейко, Я. Б. Рутицкий, В. Я. Стеценко, *Приближенное решение операторных уравнений*, “Наука”, Москва, 1969.

КИЕВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Т. ШЕВЧЕНКО, ФАКУЛЬТЕТ КИБЕРНЕТИКИ, 252601, КИЕВ, УЛ. ВЛАДИМИРСКАЯ 64

Поступила 10.12.96