Обчислювальна та прикладна математика
Вип. 82, 1997, стор. 75–78

Computational and Applied Mathematics
No. 82, 1997, pp. 75–78

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ТОЧНОСТИ ДИСКРЕТНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

УДК 519.6

В. Г. ПРИКАЗЧИКОВ

РЕЗЮМЕ. Представлены главные слагаемые в разложении по степеням шага квадратной сетки погрешности собственных чисел дискретных аналогов спектральных задач для эллиптических операторов второго и четвертого порядков. При этом использовалась компактность ограниченного множества в гильбертовом пространстве, которая обеспечила сходимость в среднем кусочно-постоянных восполнений сеточных собственных функций и слабую сходимость таких восполнений для разностных производных. Это, в свою очередь, позволило установить принадлежность собственных функций исходных задач соответствующим соболевским пространствам.

1. Введение

Установление главного слагаемого в разложении по степеням шага квадратной сетки погрешности собственных чисел (с.ч.) дискретного аналога представляет интерес по ряду причин:

— получение не улучшаемой оценки точности при естественном требовании гладкости собственных функций (с.ф.);

— обоснование многосеточности метода экстраполяции;

— уточнение с.ч. по простой формуле;

— построение схем повышенной точности.

2. Слабая сходимость восполнений дискретных решений

В гильбертовом пространстве H со скалярным произведением (u,ν) рассматривается обобщенная спектральная задача

$$(Lu-\lambda Mu,\nu)=0, \qquad \forall\nu\in H, \tag{1}$$

где (Lu,ν) и (Mu,ν) — симметричные билинейные формы соответственно операторов L и M, удовлетворяющих условиям

$$(Lu,u)\geq c(u,u), \qquad (Mu,u)\geq c(u,u), \qquad c>0.$$

Другой вариант вариационной постановки спектральной задачи дает рекурсивное определение с.ч. и с.ф. Сначала определяем первое с.ч. λ_1 и первую с.ф. u_1, а затем последовательно остальные с.ч. λ_k и с.ф. u_k

$$\lambda_k=\inf_{\nu\in H}\frac{(L\nu,\nu)}{(M\nu,\nu)} \tag{2}$$

при дополнительном условии ортогональности

$$(\nu, u_i) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Третий вариант постановки задачи дает независимое определение с.ч. и с.ф. (минимаксный принцип).

Пусть $\nu_i \in H$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, — произвольная система линейно независимых функций, тогда

$$\lambda_k = \sup_{\nu_i} \inf_{\nu \in H} \frac{(L\nu, \nu)}{(M\nu, \nu)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, \qquad (\nu, \nu_i) = 0. \tag{3}$$

В пространстве сеточных функций E рассматривается разносный аналог спектральной задачи для всех вариантов постановок в прямоугольной области на квадратной сетке с шагом h.

$$(L^h y, x)^h = \lambda^h (M^h y, x)^h, \qquad \forall x \in E, \tag{1^h}$$

$$\lambda_k^h = \inf_{x \in E} \frac{(L^h \nu, \nu)^h}{(M^h \nu, \nu)^h}, \qquad (x, y_i)^h = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{2^h}$$

Здесь y_i сеточная с. ф. номера i.

$$\lambda_k^h = \sup_{\nu_i} \inf_{x \in E} \frac{(L^h x, x)^h}{(M^h x, x)^h}, \qquad i = 1, 2, \ldots, \qquad (x, z_i)^h = 0, \tag{3^h}$$

где $z_i \in E$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$ — произвольная система линейно независимых функций, $(y, x)^h$ — скалярное произведение в E.

Пусть $\{\lambda^h; y\}$ — решение спектральной задачи номера k на сетке с шагом h. Варьируя шаг сетки, получим минимизирующую последовательность с.ф. $\{y\}$ и числовую последовательность с.ч. $\{\lambda^h\}$.

Пусть $\tilde{y}$ — гладкое восполнение сеточной функции. Предельный переход при $h \to 0$ в интегральных суммах $(L^h\tilde{y}, \tilde{y})^h$, $(M^h\tilde{y}, \tilde{y})^h$ устанавливает равномерную по h ограниченность последовательности $\{\lambda^h\}$. В результате из этой последовательности выделяется числовая подпоследовательность, сходящаяся к числу λ^*.

Далее, используя равномерную ограниченность $\{\lambda^h\}$ и вариационную постановку задачи при $h \le h_0$, устанавливается равномерная по h ограниченность квадратичных форм $(L\tilde{y}, \tilde{y})$, $(M\tilde{y}, \tilde{y})$, $(L\tilde{y}, L\tilde{y})$, $(M\tilde{y}, M\tilde{y})$.

Используя слабую компактность ограниченного множества в гильбертовом пространстве, получим последовательность гладких восполнений слабо сходящихся в L_2 к функции u^* и ее частным обобщенным производным, входящим в оператор L. Таким образом, предельная функция u^* принадлежит соболевскому пространству W. Взяв в качестве пробных в тождестве (2) достаточно гладкие функции из пространства C плотного в W и переходя к пределу при $h \to 0$, убедимся в том, что предельная пара $\{\lambda^*; u^*\}$ удовлетворяет тождеству (1) при любой функции из W.

Для того, чтобы установить сходимость решения $\{\lambda_k^h; y_k\}$ дискретной задачи к решению $\{\lambda_k; u_k\}$ исходной задачи того же номера k используется как рекурсивное так и независимое определение собственных решений, начиная с первого $\{\lambda_1; u_1\}$.

В результате справедливо

Утверждение. *Пусть k — фиксированный номер, λ_k — простое с.ч. исходной задачи. Тогда при $h \to 0$ λ_k^h сходятся к λ_k, а соответствующие последовательности гладких восполнений сеточных с.ф. и их разностных производных слабо сходятся в L_2 к с.ф. u_k исходной задачи и ее обобщенным производным, так что u_k принадлежит соболевскому пространству W.*

3. Асимптотические формулы точности

Для с.ф. u_k введем погрешность с.ф. $\varepsilon_k = y_k - u_k$. Сформулируем задачу для ε_k

$$L^h\varepsilon_k - \lambda_k^h\varepsilon_k = \lambda_k^h M^h u_k - L^h u_k. \tag{4}$$

Условие разрешимости системы (4) $(\lambda_k^h M^h u_k - L^h u_k, y_k) = 0$ дает формулу для погрешности с.ч.

$$\lambda_k^h - \lambda_k = \frac{(L^h u_k - \lambda_k M^h u_k, y_k)^h}{(M^h u_k, y_k)^h}. \tag{5}$$

Принимая во внимание слабую сходимость восполнений после перехода к пределу в (5) при $h \to 0$, получим формулу

$$\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_k - \lambda_k^h}{h^2} = \int_\Omega f(\lambda_k, u_k, \dots)\,dx,$$

где f квадратичная форма, переменными в которой являются с.ф. u_k и ее обобщенные производные до порядка $p+1$, если эллиптический оператор имеет порядок $2p$.

Приведем примеры формул для двух спектральных задач в прямоугольнике Ω с границей Γ [1, 2].

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(p_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(p_2\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \lambda u = 0, \qquad (x_1, x_2) \in \Omega,$$

$u = 0$, $(x_1, x_2) \in \Gamma$,

$$(a_1 y_{\bar{x}_1})_{x_1} + (a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2} + \lambda^h y = 0, \qquad (x_1, x_2) \in \omega,$$

$y = 0$, $(x_1, x_2) \in \gamma$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_k - \lambda_k^h}{h^2} = \frac{1}{12}\iint\limits_\Omega \left[\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_1^2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(p_1\frac{\partial u_k}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_2^2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(p_2\frac{\partial u_k}{\partial x_2}\right)\right] dx_1\,dx_2,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(p_1\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + p_0\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\left(p_3\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(p_0\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + p_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = \lambda u,$$

$(x_1, x_2) \in \Omega$, $u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$, $(x_1, x_2) \in \Gamma$,

$$\left(a_1 y_{\bar{x}_1 x_1} + a_0 y_{\bar{x}_2 x_2}\right)_{\bar{x}_1 x_1} + 2\left(a_3 y_{\bar{x}_2\bar{x}_2}\right)_{x_1 x_2} + \left(a_0 y_{\bar{x}_1 x_1} + a_2 y_{\bar{x}_2 x_2}\right)_{\bar{x}_2 x_2} = \lambda^h y,$$

$(x_1, x_2) \in \omega$,

$$y = y_{\hat{x}_1}\cos(n_1 x_1) + y_{\hat{x}_2}\cos(n_1 x_2) = 0, \qquad (x_1, x_2) \in \gamma,$$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_k - \lambda_k^h}{h^2} = \frac{1}{6}\iint\limits_\Omega \Bigg[&\frac{\partial^3 u_k}{\partial x_1^3}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(p_1\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_1^2} + p_0\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_2^2}\right)\\ &+ \frac{\partial^3 u_k}{\partial x_2^3}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(p_0\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_1^2} + p_2\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_2^2}\right)\\ &+ \frac{\partial^3 u_k}{\partial x_1^2\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(p_3\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right)\\ &+ \frac{\partial^3 u_k}{\partial x_1\partial x_2^2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(p_3\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_1\partial x_2}\right)\Bigg] dx_1\,dx_2.\end{aligned}$$

Литература

1. В. Г. Приказчиков, *Главный член разложения погрешности собственных значений дискретного аналога эллиптического оператора четвертого порядка*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **32** (1992), № 7, 1016–1024.
2. В. Г. Приказчиков, *Главный член разложения погрешности собственных значений дискретного аналога эллиптического оператора*, Ж. вычисл. матем. матем. физ. **32** (1992), № 10, 1671–1676.

КИЕВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. ТАРАСА ШЕВЧЕНКО, ФАКУЛЬТЕТ КИБЕРНЕТИКИ, 252601, КИЕВ, УЛ. ВЛАДИМИРСКАЯ, 64

Поступила 10.10.96