Обчислювальна та прикладна математика
Вип. 82, 1997, стор. 79–83

Computational and Applied Mathematics
No. 82, 1997, pp. 79–83

АДДИТИВНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ И ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

УДК 518:517.944/947

А. А. САМАРСКИЙ И П. Н. ВАБИЩЕВИЧ

РЕЗЮМЕ. В работе строятся аддитивные разностные схемы для дифференциально-операторных уравнений первого порядка. Изложение базируется на общей теории устойчивости операторно-разностных схем в сеточных гильбертовых пространствах. Основное внимание уделяется случаю аддитивного расщепления с произвольным числом попарно некоммутируемых операторных слагаемых. Аналогично рассматриваются аддитивные схемы для эволюционных уравнений второго порядка.

1. Введение

При приближенном решении начально-краевых задач для многомерных уравнений с частными производными большое внимание уделяется построению аддитивных схем [1, 2]. переход к цепочке более простых задач позволяет построить экономичные разностные схемы — расщепление по пространственным переменным. В ряде случаев полезно отделить подзадачи различной природы — расщепление по физическим процессам. В последнее время (см., например, [3, 4]) активно обсуждаются регионально-аддитивные схемы (схемы декомпозиции области), которые ориентированы на построение вычислительных алгоритмов для параллельных компьютеров.

В работе строятся аддитивные разностные схемы для дифференциально-операторных уравнений первого порядка. Изложение базируется на общей теории устойчивости операторно-разностных схем в сеточных гильбертовых пространствах [1]. Основное внимание уделяется случаю аддитивного расщепления с произвольным числом попарно некоммутируемых операторных слагаемых. Аналогично рассматриваются аддитивные схемы для эволюционных уравнений второго порядка. Особого внимания заслуживает общий контсруктивный принцип построения схем заданного качества — принцип регуляризации разностных схем.

Теория итерационных методов для приближения решения стационарных задач математической физики трактуется как часть общей теории устойчивости операторно-разностных схем [1]. На основе аддитивных схем строятся новые классы итерационных методов, ориентированных на применение параллельных компьютеров. Выделен достаточно общий класс итерационных методов кластерного агрегирования [5], который включает в себя, в частности, мультипликативный (скалярный, синхронный) и аддитивный (параллельный, асинхронный) варианты итерационного метода Шварца. Установлены тесные связи рассматриваемого класса итерационных методов кластерного агрегирования со схемами покомпонентного расщепления.

Удается рассмотреть новые варианты итерационных методов многокомпонентного расщепления с последовательной и параллельной организацией вычислений. При многокомпонентном расщеплении без требования попарной перестановочности операторов предоставляется возможность ускорения по сопряженным градиентам.

2. Аддитивные схемы

Рассматривается задача Коши для эволюционного уравнения первого порядка в сеточном вещественном гильбертовом пространстве H, к которой мы приходим после дискретизации по пространству при приближенном решении начально-краевой задачи для параболического уравнения. Ищется функция $y(t) \in H$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{dy}{dt} + \Lambda y = f(t), \qquad 0 < t \le T \tag{1}$$

и начальному условию

$$y(0) = u_0. \tag{2}$$

Будем считать, что для оператора $\Lambda > 0$ справедливо следующее аддитивное представление

$$\Lambda = \sum_{\alpha-1}^{p} \Lambda_\alpha, \quad \Lambda_\alpha \ge 0, \quad \alpha = 1(1)p. \tag{3}$$

Аддитивные разностные схемы строятся на основе представления (3), причем переход с одного временного слоя t^n на другой временной слой $t^{n+1} = t^n + \tau$ связан с решением задач для отдельных операторов Λ_α, $\alpha = 1(1)p$ в аддитивном разложении (3), т.е. задача распадается на p подзадач.

Примером аддитивных схем являются классические схемы покомпонентного расщепления (локально-одномерные схемы) [1, 2]. При ориентации на современные параллельные компьютеры особого внимания заслуживают аддитивно-усредненные схемы покомпонентного расщепления [2, 6]. Такие схемы построены не только для эволюционных уравнений первого порядка, но и для уравнений второго порядка [7]. Для широкого класса нестационарных задач применяются векторные аддитивные разностные схемы [8, 9]. Можно отметить также новые возможности получения безусловно устойчивых факторизованных схем.

3. Схемы суммарной аппроксимации

Аддитивные разностные схемы для задач с расщеплением на три и более попарно некоммутируемых операторов традиционно [1, 2] строятся на основе понятия суммарной аппроксимации — схемы покомпонентного расщепления (локально-одномерные схемы). Для задачи (1)–(3) имеем

$$\frac{y^{n+\alpha/p} - y^{n+(\alpha-1)/p}}{\tau} + \Lambda_\alpha(\sigma y^{n+\alpha/p} + (1-\sigma) y^{n+(\alpha-1)/p}) = f_\alpha^n, \tag{4}$$

$$\alpha = 1(1)p, \qquad n = 0, 1, \dots,$$

где

$$f^n = \sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha^n.$$

Хорошо известно, что при $\sigma \ge \frac{1}{2}$ схема покомпонентного расщепления (4) безусловно устойчива.

В плане вычислительной реализации на современных параллельных компьютерах отдельного упоминания заслуживают аддитивно- усредненные схемы [2, 6, 7]:

$$\frac{y_\alpha^{n+1} - y^n}{\tau} + \Lambda_\alpha(\sigma y_\alpha^{n+1} + (1-\sigma)y^n) = f_\alpha^n, \tag{5}$$
$$\alpha = 1(1)p, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$
$$y^{n+1} = \frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p} y_\alpha^{n+1}.$$

Условия устойчивости таких схем такие же, как и стандартных схем покомпонентного расщепления (4). Принципиальное преимущество аддитивно-усредненных схем (5) связано с тем, что допускается параллельная организация вычислений сеточных функций y_α^{n+1}, $\alpha = 1(1)p$.

4. Факторизованные схемы

Для двухкомпонентного расщепления ($p = 2$ в представлении (3)) широко используются факторизованные схемы в различных вариантах [1] (схемы переменных направлений, попеременно-треугольные схемы). Кратко обсудим возможности построения многокомпонентных факторизованных схем.

Разностная схема записывается в канонической форме

$$B\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + Ay^n = f^n, \tag{6}$$

с $A = \Lambda$. Для многокомпонентного расщепления стандартная форма факторизованной схемы имеет вид

$$B = \prod_{\alpha=1}^{p}(E + \sigma\tau\Lambda_\alpha).$$

Для общего случая попарно неперестановочных неотрицательных операторов Λ_α, $\alpha = 1(1)p$ мы не можем гарантировать самосопряженности оператора B и его положительности.

Можно ориентироваться на следующее двойное мультипликативное представление оператора B:

$$B = \prod_{\alpha=1}^{p}(E + \sigma\tau\Lambda_\alpha)\prod_{\beta=p}^{1}(E + \sigma\tau\Lambda_\beta^*), \qquad B = B^* > 0. \tag{7}$$

На основе результатов общей теории устойчивости легко устанавливается безусловная устойчивость факторизованной схемы (6), (7) при $\sigma \geq \frac{1}{4}$.

5. Векторные аддитивные схемы

В соответствии с [8, 9] определим вектор $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_p)$, каждая компонента которого определяется из решения системы уравнений

$$\frac{dy_\alpha}{dt} + \sum_{\beta=1}^{p}\Lambda_\beta y_\beta = f(t), \tag{8}$$

$$y_\alpha(0) = u_0, \qquad \alpha = 1(1)p.$$

Произвольная компонента вектора $Y(t)$ может быть выбрана в качестве решения исходной задачи (1),(2).

Далее строятся те или иные схемы для системы уравнений (8). Приведем характерный пример векторной аддитивной схемы. Схема полной аппроксимации

$$(E+\sigma\tau\Lambda_\alpha)\frac{y_\alpha^{n+1}-y_\alpha^n}{\tau}+\sum_{\beta=1}^{p}\Lambda_\beta y_\beta^n=f^n,$$

$\alpha=1(1)p$, $n=0,1,\ldots$ безусловно устойчива при $\sigma\geq p/2$. На пути аппроксимаци системы уравнений (8) строятся схемы повышенного порядка аппроксимации, аддитивные схемы для эволюционных уравнений второго порядка и т.д.

6. Регуляризованные аддитивные схемы

Для построения аддитивных схем можно использовать общий конструктивный принцип регуляризации разностных схем [1]. Кратко проиллюстрируем его на примере задачи (1)–(3). В качестве первичной рассмотрим простейшую явную схему

$$\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau}+\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha y^n=f^n.$$

Она записывается в канонической форме (6) с операторами

$$B=E,\qquad A=\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha.$$

Аддитивные схемы построим на основе возмущения каждого отдельного операторного слагаемого в аадитивном представлении (3):

$$B=E,\qquad A=\sum_{\alpha=1}^{p}(E+\sigma\tau\Lambda_\alpha)^{-1}\Lambda_\alpha. \tag{9}$$

Схема (6),(9) безусловно устойчива при $\sigma\geq p/2$.

Можно ориентироваться на параллельную реализацию схемы (6),(9):

$$\frac{y_\alpha^{n+1}-y^n}{\tau}+(E+\sigma\tau\Lambda_\alpha)^{-1}\Lambda_\alpha y^n=f_\alpha^n,$$

$$\alpha=1(1)p,\qquad n=0,1,\ldots,$$

$$y^{n+1}=\frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p}y_\alpha^{n+1}.$$

Тем самым мы снова приходим к аддитивно-усредненой схеме, построение которой проводится теперь без привлечения понятия суммарной аппроксимации.

Литература

1. А. А. Самарский, *Теория разностных схем*, “Наука”, Москва, 1989.
2. A. A. Samarskii, P. N. Vabishchevich, *Computational Heat Transfer*, Wiley, Chichester, 1995.
3. П. Н. Вабищевич, *Регионально-аддитивные разностные схемы стабилизирующей поправки для параболических задач*, ЖВМ и МФ **34** (1994), № 12, 1832–1842.
4. А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, *Векторные аддитивные схемы декомпозиции области для параболических задач*, Дифференциальные уравнения **31** (1995), № 9, 1563–1569.
5. А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, *Итерационные методы кластерного агрегирования для систем линейных уравнений*, ДАН **349** (1996), № 1, 22–25.
6. Д. Г. Гордезиани, Г. В. Меладзе, *О моделировании третьей краевой задачи для многомерных параболических уравнений в произвольной области одномерными уравнениями*, ЖВМ и МФ **14** (1974), № 1, 246–250.

7. Д. Г. Гордезиани, А. А. Самарский, *Некоторые задачи термоупругости пластин и оболочек и метод суммарной аппроксимации*, Комплексный анализ и его приложения, "Наука", Москва, 1978, стор. 173–186.
8. В. Н. Абрашин, *Об одном варианте метода переменных направлений решения многомерных задач математической физики*, Дифференциальные уравнения **26** (1990), № 2, 314–323.
9. П. Н. Вабищевич, *Векторные аддитивные разностные схемы для эволюционных уравнений первого порядка*, ЖВМ и МФ **36** (1996), № 3, 44–51.

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РАН, 125047 МОСКВА, МИУССКАЯ ПЛ., 4, РОССИЯ

Поступила 11.10.96