

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ МЕЖФАЗНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ПОРИСТОУПРУГОЙ НАСЫЩЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ СРЕДЕ

УДК 539.3

А. Н. ТРОФИМЧУК И О. А. САВИЦКИЙ

РЕЗЮМЕ. Рассматриваются динамические процессы в двухфазной пористой насыщенной жидкостью среде. Уравнения модели Био–Френкеля, учитывающей упругое, инерционное и вязкое взаимодействие твердой и жидкой фаз, используются для моделирования методом конечных элементов динамики слоя грунта (плоская деформация) под действием установившихся и нестационарных воздействий. Для слоя при одноосном нагружении приводятся примеры вычисленных перемещений скелета грунта и поровой жидкости.

В реальных условиях грунты, на которых возводятся сооружения, водонасыщены, что существенно сказывается на напряженно-деформированном состоянии системы конструкция-основание, особенно в зоне контакта. При динамических воздействиях важно учитывать кратковременные переходные процессы межфазового взаимодействия в грунте. Вопросы выбора модели двухфазной среды, граничных условий и физических параметров обсуждались в работах [3, 4] и др. Наиболее универсальной является модель Био [1] двухфазной пористоупругой насыщенной жидкостью среды, на основе которой развиваются подходы к решению нелинейных задач [6, 7]. Модель учитывает упругое, инерционное и вязкое взаимодействие твердой и жидкой фаз. С использованием этой модели для динамических контактных задач, рассмотренных в [3] и других работах, представлена методика учета взаимодействия фундаментов сооружений с грунтовым водонасыщенным основанием, проведен анализ волновых полей в среде. Здесь рассматривается подход, основанный на применении метода конечных элементов (МКЭ) [5].

Система дифференциальных уравнений движения пористоупругой насыщенной жидкостью среды, согласно динамической теории Био–Френкеля [1, 2] записывается в виде

$$\rho_{11} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} + b \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \sigma_{ij}^s}{\partial x_j}, \quad (1)$$

$$\rho_{12} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} + b \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} - \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \sigma_{ji}^f}{\partial x_{ji}},$$

где в предположении изотропности и линейности пористой твердой фазы связь напряжений с деформациями принимается следующей:

$$\sigma_{ij}^s = A e \delta_{ij} + N \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + Q \varepsilon \delta_{ij}; \quad e = \operatorname{div} \vec{u}; \quad \varepsilon = \operatorname{div} \vec{v}; \quad (2)$$

$$\sigma^f = -mp_0 = Qe + R\epsilon, \quad (3)$$

u_i, v_i — компоненты векторов перемещений твердой \vec{u} и жидкой \vec{v} фаз в декартовых координатах; t — время; $\rho_{11} = (1 - m)\rho_s - \rho_{12}$; $\rho_{22} = m\rho_f - \rho_{12}$; ρ_s, ρ_f — плотности твердой и жидкой фаз, ρ_{12} — коэффициент динамической связи фаз, имеющий размерность плотности; m — пористость (отношение объема пор ко всему объему грунта); $N = \mu$; $A = \lambda + K_f a_0^2 S_0 / m$; $R = mK_f S_0$; $Q = a_0 K_f S_0$; λ и μ — константы Ламе; K_f — модуль объемной сжимаемости жидкости; θ_0 — динамический коэффициент вязкости жидкости; $S_0 = mK_r / (mK_r + a_0 K_t)$; $a_0 = 1 - m - K_\nu / K_r$; $K_\nu = 2\mu/3$; K_r — истинный модуль сжимаемости твердой фазы; $b = m^2 \theta_0 / K_p$; K_p — коэффициент проницаемости; e — объемная деформация минерального скелета; ϵ — объемная деформация жидкой фазы; σ_{ij}^s — тензор напряжений в скелете при протекании жидкости; σ^f — сила, действующая на жидкость, отнесенная к единице поперечного сечения пористой среды; δ_{ij} — символ Кронекера. Напряженное состояние твердой фазы характеризуется эффективными напряжениями $\sigma_{ef} = \sigma_{ij}^s + (1 - m)p_0 \delta_{ij}$. При моделировании массива грунта ограниченной областью, покрытой сеткой конечных элементов, для динамических задач следует задать условия пропускания волн в не принимаемую во внимание при расчете часть среды через ограничивающий контур. Уравнения (1) описывают продольные волны двух типов в двухфазной среде, распространяющиеся независимо друг от друга. Продольная волна первого типа соответствует синфазному движению скелета грунта и жидкости и в пределе, если связь между фазами слабая, соответствует продольной волне в упругой среде. В продольной волне второго типа движение скелета грунта и жидкости противофазно. Данная волна связана с движением поровой жидкости относительно скелета, затухание волны значительно, особенно на низких частотах. Таким образом, отброшенную часть среды можно считать квазиоднофазной, заменяя ее на контуре системой напряжений, вызываемой упругими продольными и поперечными волнами, параметры которых соответствуют характеристикам волн в упругом минеральном скелете.

В конечно-элементной формулировке система уравнений (1) в общем случае принимает вид:

$$[M] \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right\} + [C] \frac{\partial \varphi}{\partial t} + [K] \{\varphi\} = \{P(t)\}, \quad (4)$$

где $[M]$, $[C]$, $[K]$ — матрицы масс, демпфирования и жесткостей соответственно, которые состоят из подматриц элементов, а вектор нагрузки $\{P(t)\}$ определяется заданными естественными граничными условиями (здесь — напряжениями) и объемными силами (в частности, инерционными). Существенные граничные условия для данной формулировки — заданные перемещения или ускорения. Граничные условия, формулируемые на границах данной среды с другими, рассматривались в работе [3].

Для плоской задачи (прямоугольная область) оптимальным в данном случае является выбор изопараметрического прямоугольного элемента сирендипова типа [5] с 8-ю узлами показанного на рис. 1 ($-1 \leq (\xi, \eta) \leq 1$ — локальные координаты). В каждом узле неизвестными являются по две компоненты перемещений для твердой и жидкой фаз. Подматрицы масс $[M]^n$, демпфирования $[C]^n$ и жесткости $[K]^n$ для узлов определены из уравнений (1)–(3) и вычисляются в виде следующих интегралов:

$$[M]^n = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \rho_{11} N_p N_q & 0 & \rho_{12} N_p N_q & 0 \\ 0 & \rho_{11} N_p N_q & 0 & \rho_{12} N_p N_q \\ \rho_{12} N_p N_q & 0 & \rho_{22} N_p N_q & 0 \\ 0 & \rho_{12} N_p N_q & 0 & \rho_{22} N_p N_q \end{bmatrix} dx dy; \quad (5)$$

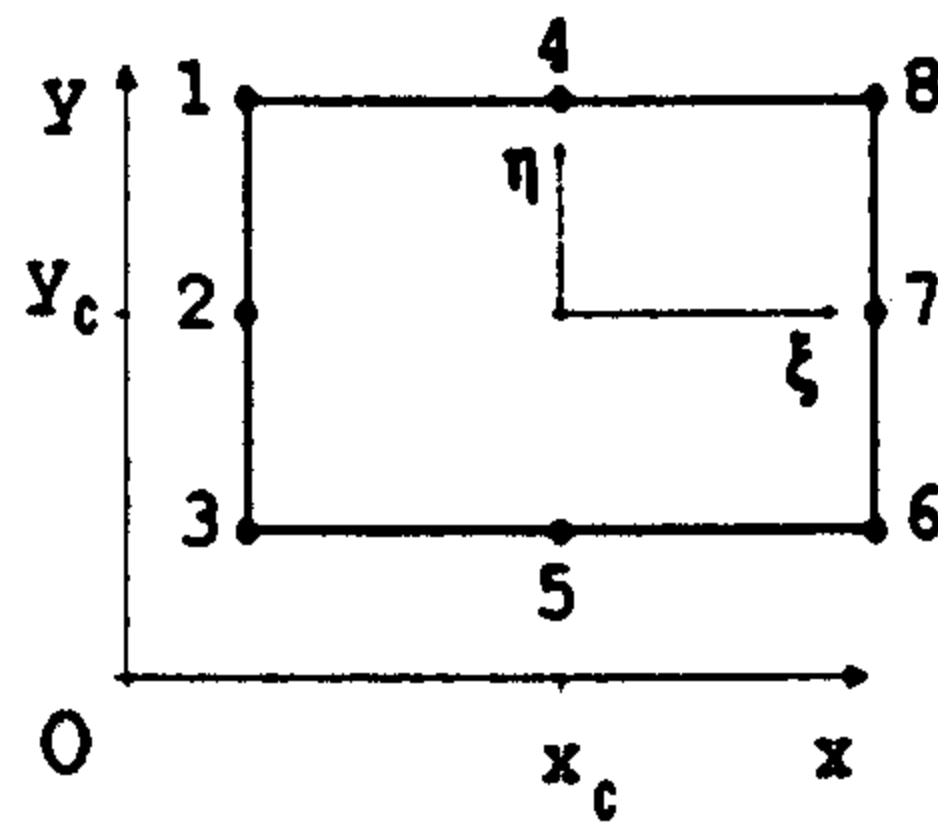


Рис. 1

$$[C]^n = b \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} N_p N_q & 0 & -N_p N_q & 0 \\ 0 & N_p N_q & 0 & -N_p N_q \\ -N_p N_q & 0 & N_p N_q & 0 \\ 0 & -N_p N_q & 0 & N_p N_q \end{bmatrix} dx dy; \quad (6)$$

$$[K]^n = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} F \frac{\partial N_p}{\partial x} \frac{\partial N_q}{\partial x} + N \frac{\partial N_p}{\partial y} \frac{\partial N_q}{\partial y} & (A + N) \frac{\partial N_p}{\partial y} \frac{\partial N_q}{\partial x} \\ (A + N) \frac{\partial N_p}{\partial y} \frac{\partial N_q}{\partial x} & F \frac{\partial N_p}{\partial x} \frac{\partial N_q}{\partial x} + N \frac{\partial N_p}{\partial y} \frac{\partial N_q}{\partial y} \\ Q \frac{\partial N_p}{\partial x} \frac{\partial N_q}{\partial x} & Q \frac{\partial N_p}{\partial y} \frac{\partial N_q}{\partial x} \\ Q \frac{\partial N_p}{\partial y} \frac{\partial N_q}{\partial x} & Q \frac{\partial N_p}{\partial y} \frac{\partial N_q}{\partial y} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q \frac{\partial N_p}{\partial x} \frac{\partial N_q}{\partial x} & Q \frac{\partial N_p}{\partial y} \frac{\partial N_q}{\partial x} \\ Q \frac{\partial N_p}{\partial y} \frac{\partial N_q}{\partial x} & Q \frac{\partial N_p}{\partial y} \frac{\partial N_q}{\partial y} \\ R \frac{\partial N_p}{\partial x} \frac{\partial N_q}{\partial x} & R \frac{\partial N_p}{\partial y} \frac{\partial N_q}{\partial x} \\ R \frac{\partial N_p}{\partial y} \frac{\partial N_q}{\partial x} & R \frac{\partial N_p}{\partial y} \frac{\partial N_q}{\partial y} \end{bmatrix} dx dy, \quad (7)$$

где $F = (A + 2N)$. Функции формы элемента N_p , N_q связывают узловые значения неизвестных с их значениями в точке с произвольными координатами, принадлежащей элементу.

Размерность подматриц элемента $[M]^e$, $[C]^e$, $[K]^e$ соответствует его типу, числу переменных в узле и схеме разбиения области на элементы. Рациональная схема уменьшает ширину диагонали матриц $[M]$, $[C]$, $[K]$ и таким образом, экономит время выполнения программы на ЭВМ, которое для динамических задач определяется, в основном, затратами времени на решение систем уравнений на каждом шаге по t .

Изучается процесс гармонических и нестационарных колебаний слоя водонасыщенного грунта на жестком основании (рис. 2) при действии на поверхности слоя распределенной нагрузки (в долях $A + 2N$).

Нагрузка вызывает напряжения в скелете грунта на свободной границе, определяемые формулой (2). При установившихся колебаниях грунта решение можно отыскивать также в форме установившихся колебаний [5] и решать для заданной частоты систему с комплексной матрицей.

На рис. 3 дано сравнение амплитуд вертикальных перемещений фаз в слое толщиной 5 м при частоте вынужденных колебаний 10 Гц и ряда значений b для следующих характеристик грунта: $\lambda + 2\mu = 1.01 \cdot 10^8$ Па; $m=0.4$, $\nu_0=0.3$; $\rho_s=2700$ кг/м³; $\rho_f=1018$ кг/м³; $K_r = 10^{11}$; $K_0 = 2.5 \cdot 10^8$; $\rho_{12}=0.0$; $\theta_0 = 1.23 \cdot 10^{-3}$. При малой проницаемости перемещения фаз в так называемом переходном слое выравниваются, а в рассмотренном диапазоне для перемещений имеется зона, в которой $\nu < u$. С ростом глубины это соотношение меняется, а ниже фазы движутся одинаково. На

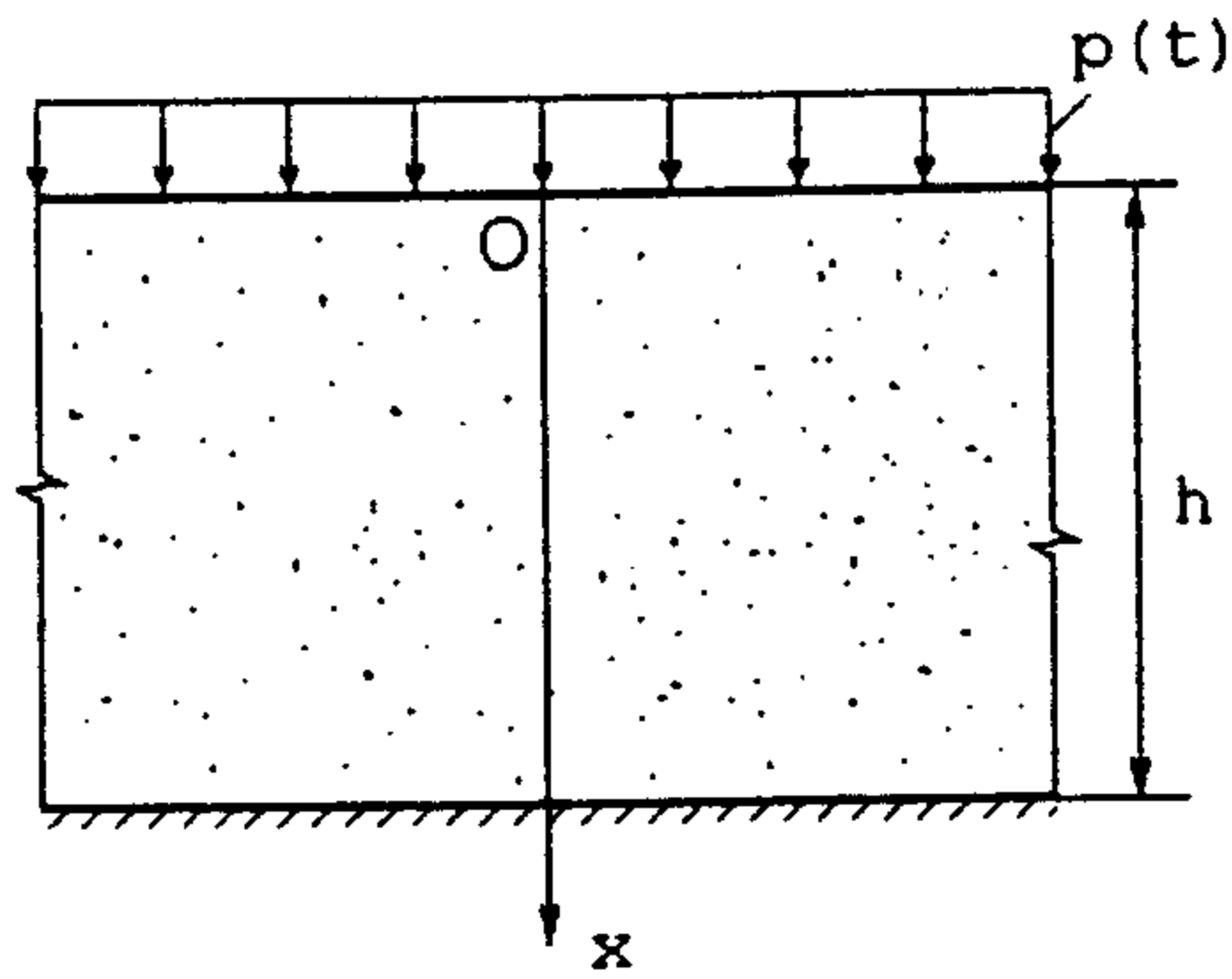


Рис. 2

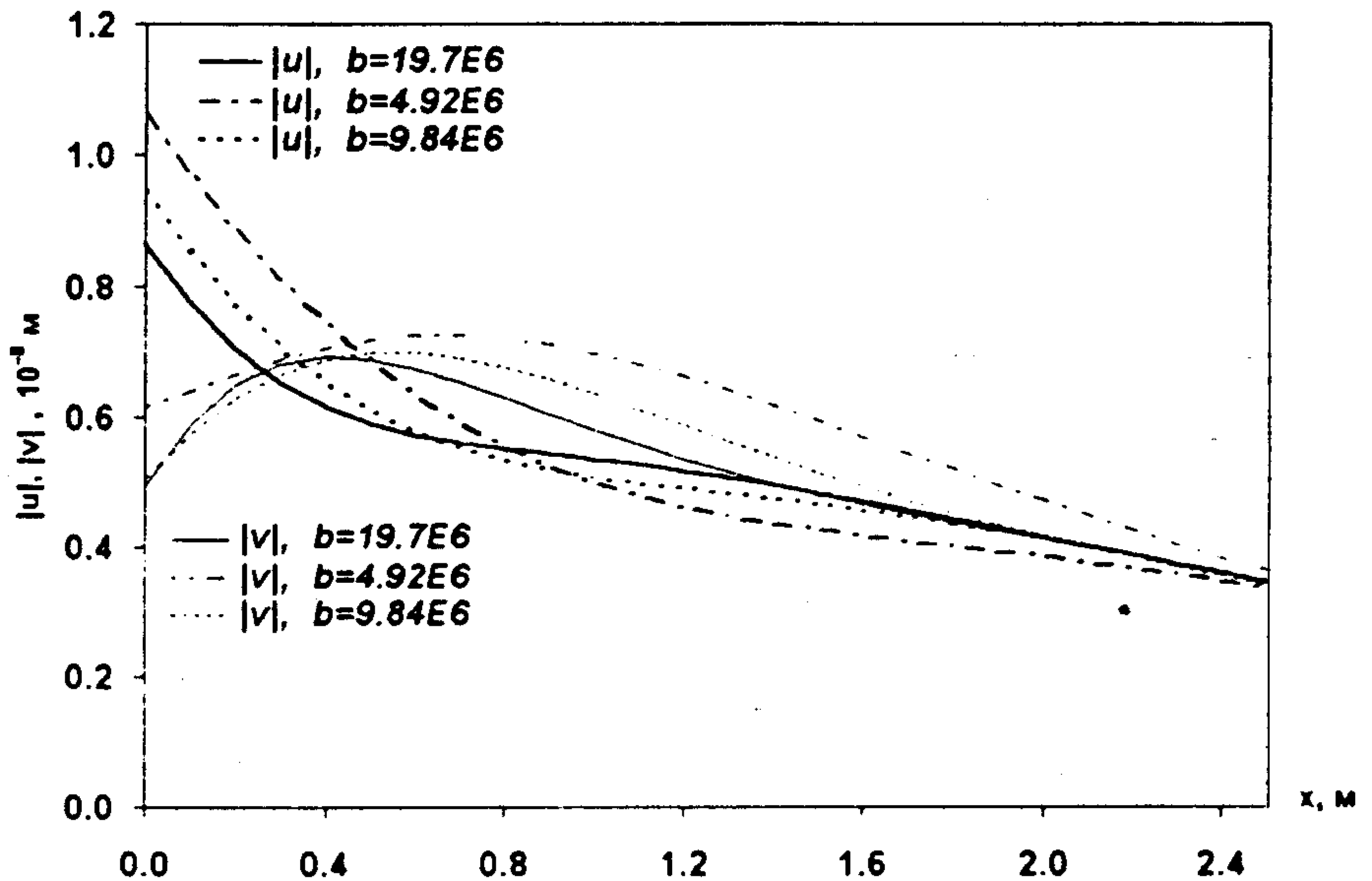


Рис. 3

рис. 4 представлены графики $|u|$ и $|v|$ в случаях передачи нагрузки на скелет и на жидкость, $h=15\text{м}$, $b = 1.23 \cdot 10^7$, остальные параметры те же.

Показано, что решение для единичной нагрузки вызывает одинаковые динамические перемещения для фазы, на которую не передается нагрузка (кривые графиков накладываются), а перемещения нагруженной фазы при одинаковом характере изменения по глубине для поровой жидкости у поверхности выше. Переходный слой, в котором движение фаз различно, имеет одинаковый размер в обоих случаях и составляет здесь треть глубины всего слоя.

Вычислялись также напряжения в скелете и поровое давление на основе формул (2), (3). При нестационарной нагрузке используется процедура Ньюмарка интегрирования по времени. На рис. 5 представлены графики изменения перемещений жидкости $v(x, t)$ после кратковременного воздействия на поверхности, показывающие, что эти перемещения определяются движением упругой волны в твердом скелете со скоростью 250 м/с, которая отражается от границ слоя $h= 5\text{м}$ (другие параметры взяты из предыдущего примера).

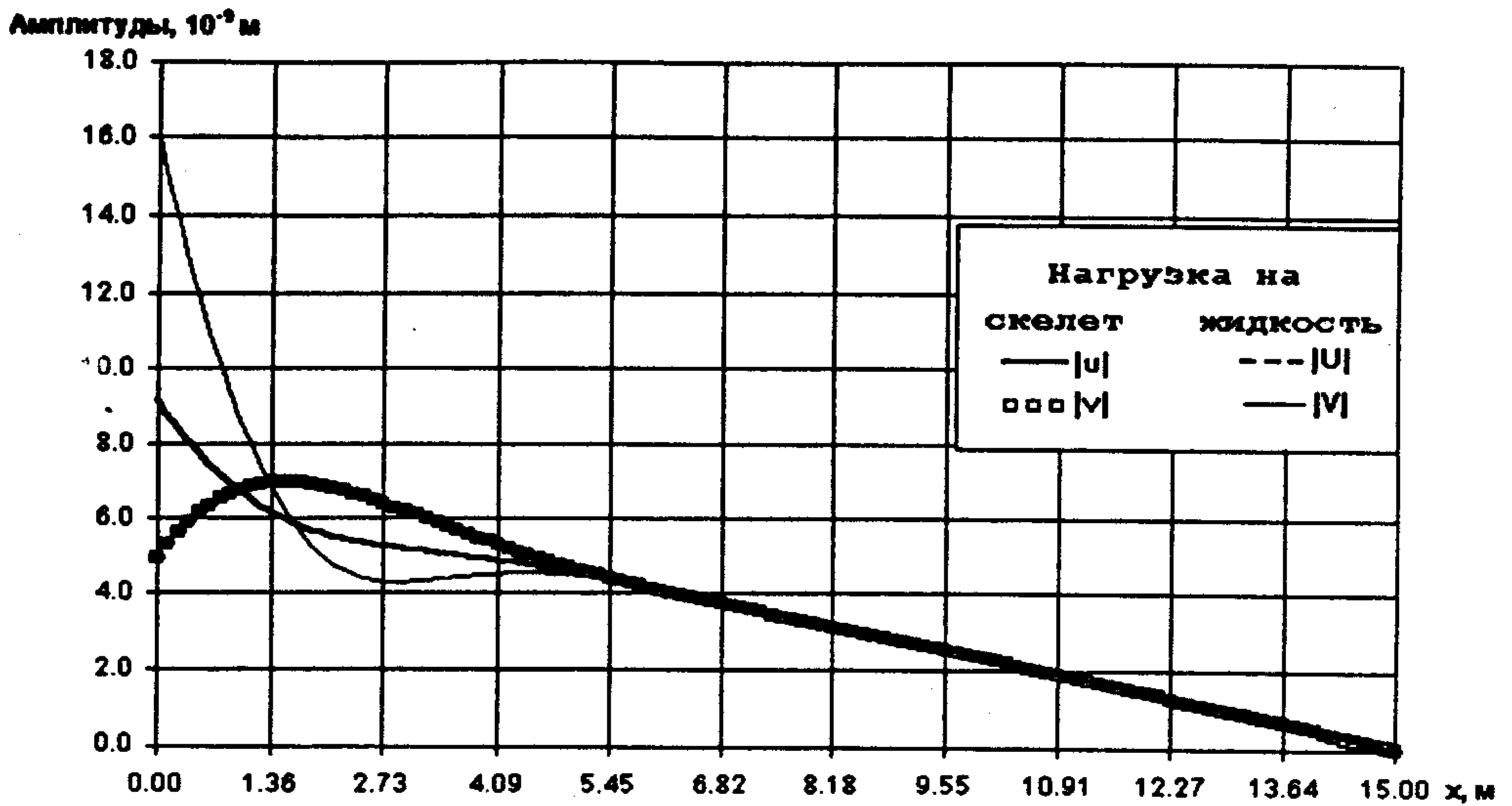


Рис. 4

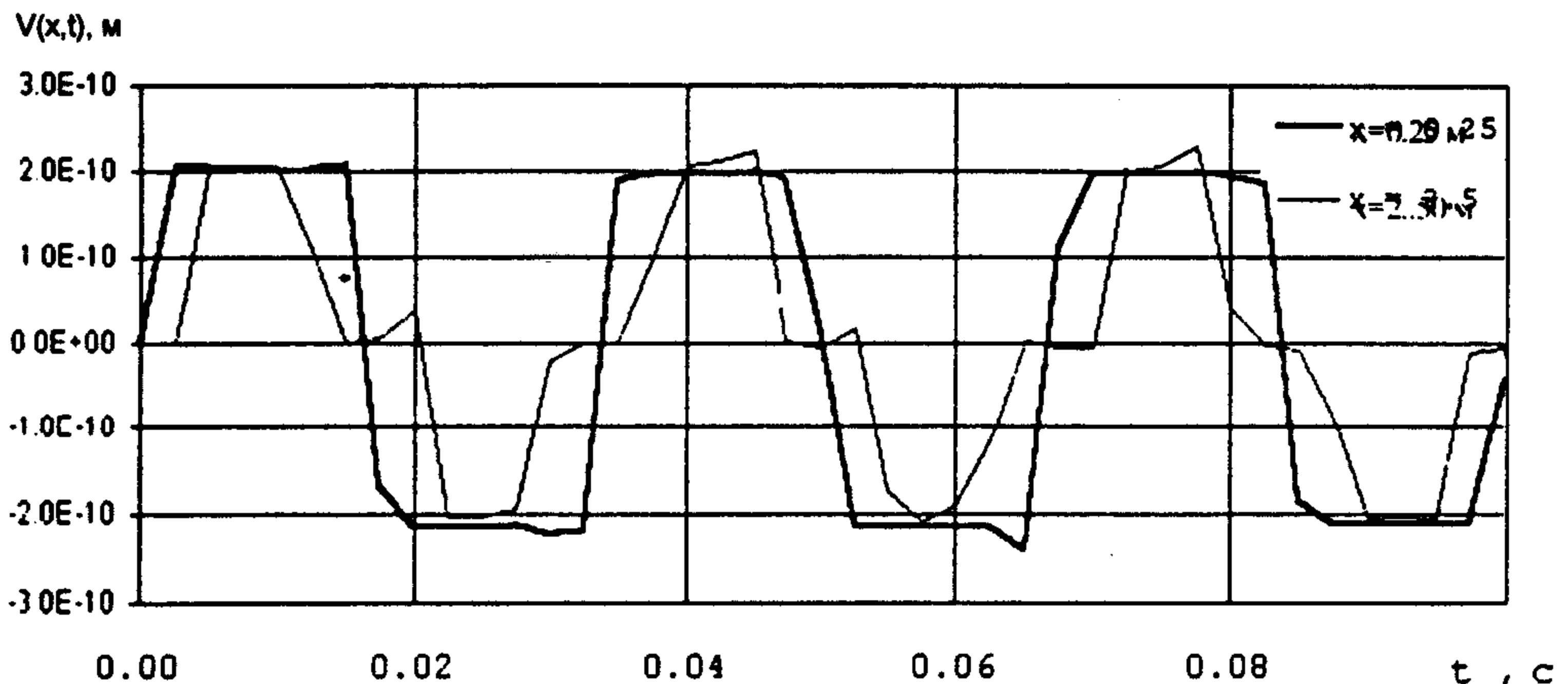


Рис. 5

Хотя наиболее наглядно эффекты взаимодействия фаз проявляются в результатах для простейших задач, при одноосном нагружении (рис. 2) не рассматриваются касательные напряжения и деформации сдвига, имеющие решающее значение при оценке устойчивости грунтового основания, позволяющие рассматривать нелинейное поведение при повторяющихся нагрузках (сейсмических воздействиях) и определять параметры упрочнения. Пластичность материала может быть принята в расчет и моделироваться при динамическом нагружении слоя грунта в условиях антиплоской деформации. В результатах решения одномерных задач также не учитываются такие факторы, как пространственный характер фильтрации и распространения возмущения, что дает, например, меньшую величину порового давления при решении задач в дву- и трехмерной постановках при оценке возможности разжижения несвязных грунтов. Численное моделирование нелинейного поведения скелета грунта при однократном одноосном нагружении может быть реализовано путем использования заданной нелинейной зависимости между напряжениями и деформациями. Наиболее совершенные по постановке задач и их реализации МКЭ методики

расчета используют для описания механического поведения скелета грунта соотношения теории пластичности, формулируемые в приращениях в сочетании с уравнениями движения водонасыщенного грунта [6, 7]. Следует отметить, что подобные численные исследования непосредственно связаны с соответствующим определением ряда параметров из экспериментов на образцах грунта.

В связи с серьезной трудоемкостью решения МКЭ динамических, особенно нестационарных, пространственных задач здесь представлен лишь подход к изучению динамических полей в пористоупругом насыщенном жидкостью слое. Отрабатываемая в процессе решения модельных задач методика реализуется в пакете программ для решения плоских задач динамики двухфазных сред, что существенно дополняет возможности анализа динамического взаимодействия сооружений с грунтовым основанием.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. A. Biot, *Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid*, J. Acoust. Soc. Amer. **28** (1956), № 2, 168–191.
2. Я. И. Френкель, *К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве*, Изв. АН СССР. Сер. Географическая и геофизическая **8** (1944), № 4, 133–149.
3. В. М. Сеймов, А. Н. Трофимчук, О. А. Савицкий, *Колебания и волны в слоистых средах*, "Наук. думка", Киев, 1990.
4. В. М. Лятхер и Ю. С. Яковлев (ред.), *Динамика сплошных сред в расчетах гидротехнических сооружений*, "Энергия", Москва, 1976.
5. O. C. Zienkiewicz, *The finite element method in engineering science*, McGraw-Hill, London, 1971.
6. O. C. Zienkiewicz, T. Shiomi, *Dynamic behaviour of saturated porous media; the generalized Biot formulation and its numerical solution*, Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech **8** (1985), 71–96.
7. C. S. Desai, H. M. Galagoda, *Earthquake analysis with generalized plasticity model for saturated soils*, Earthquake Eng. Struc. Dyn. **18** (1989), 903–919.