Обчислювальна та прикладна математика
Вип. 82, 1997, стор. 90–96

Computational and Applied Mathematics
No. 82, 1997, pp. 90–96

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ВНЕШНИХ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

УДК 519.64

Р. С. ХАПКО

РЕЗЮМЕ. В настоящей работе предлагается три различных подхода для численного решения первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности, каждый из которых базируется, в конечном итоге, на методе граничных интегральных уравнений.

1. Постановка задачи

Нахождение приближенных решений внешних начально-краевых задач сопряжено с определенными трудностями, связанными с размерностью задачи и неограниченностью области, где ищется решение. В настоящей работе мы предлагаем три различных подхода для численного решения первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности, каждый из которых базируется в конечном итоге на методе граничных интегральных уравнений.

Пусть $D \subset R^2$ — неограниченная область такая, что ее дополнение ограничено и односвязно. Предположим, что граница Γ области D из класса C^2 и $T > 0$. Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad \text{в} \quad D \times (0, T], \tag{1.1}$$

с коэффициентом теплопроводности $c > 0$. Нас интересует классическое решение (1.1), которое дважды непрерывно-дифференцируемо относительно пространственных переменных и непрерывно-дифференцируемо относительно временной переменной в $D \times (0, T]$ и которое удовлетворяет однородному начальному условию

$$u(x, 0) = 0, \qquad x \in D \tag{1.2}$$

и граничному условию Дирихле

$$u(x, t) = f(x, t) \quad \text{на} \quad \Gamma \times (0, T], \tag{1.3}$$

где f заданная функция, удовлетворяющая условию согласования

$$f(x, 0) = 0, \qquad x \in \Gamma.$$

Будем предполагать также, что на бесконечности мы имеем

$$u(x, t) \to 0, \qquad |x| \to \infty, \tag{1.4}$$

равномерно относительно всех направлений $\frac{x}{|x|}$ и всех $t \in [0, T]$. Существование и единственность решения поставленной задачи установлены (см. [3]).

2. Способы устранения времени

2.1. Преобразование Лагерра..

Применим к поставленной задаче (1.1)-(1.4) интегральное преобразование Лагерра по временной переменной, которое имеет вид [1]

$$g_n = \int_0^x g(t)\exp\{-\lambda t\}L_n(\lambda t)\,dt, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{2.1}$$

где $g(t)$ — оригинал, g_n — изображение, $\lambda > 0$ — фиксированный параметр.

Обратное преобразование осуществляется суммированием ряда Фурье–Лагерра

$$g(t) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} g_n L_n(\lambda t). \tag{2.2}$$

В результате в пространстве изображений получим бесконечную последовательность граничных задач

$$\begin{aligned} &\Delta u_n - \frac{\lambda}{c}u_n = \frac{\lambda}{c}\sum_{m=0}^{n-1} u_m \qquad \text{в} \quad D,\\ &u_n(x) = f_n(x) \qquad \text{на} \quad \Gamma,\\ &u_n(x) \to 0, \qquad |x| \to 0 \end{aligned}$$

для $n = 0, 1, \ldots$. Здесь u_n и f_n — изображения по Лагерру функций u и f соответственно. Очевидно, что при численном определении решения u по известным изображениям u_n приходится ограничиваться N_1-ой частичной суммой ряда (2.2).

2.2. Метод Ротэ.

Введем на отрезке $[0, T]$ разбиение

$$t_i = (i+1)h_t, \qquad i = -1, 0, \ldots, N_2 - 1, \qquad h = \frac{T}{N_2} \tag{2.3}$$

и осуществим непосредственную дискретизацию задачи (1.1)-(1.4). После замены производной по времени левой конечной разностью получим последовательность стационарных задач

$$\begin{aligned} &\Delta u_n - \frac{1}{ch}u_n = -\frac{1}{ch}u_{n-1} \qquad \text{в} \quad D,\\ &u_{-1}(x) = 0 \qquad \text{в} \quad D,\\ &u_n(x) = f_n(x) \qquad \text{на} \quad \Gamma,\\ &u_n(x) \to 0, \qquad |x| \to 0, \end{aligned}$$

для $n = 0, 1, \ldots, N_2 - 1$. Здесь $u_n(x) \approx u(x, t_n)$ и $f_n(x) = f(x, t_n)$. Таким образом, в обоих методах возникает необходимость решения последовательности граничных задач Дирихле для неоднородного уравнения Гельмгольца с чисто мнимым параметром. Поэтому рассмотрим в дальнейшем следующую обобщенную последовательность задач

$$\Delta u_n - \gamma^2 u_n = \beta \sum_{m=n-p}^{n-1} u_m \qquad \text{в} \quad D, \tag{2.4}$$

$$u_n(x) = f_n(x) \qquad \text{на} \quad \Gamma, \tag{2.5}$$

$$u_n(x) \to 0, \qquad |x| \to 0, \quad n = 0, 1, \ldots, N, \tag{2.6}$$

где $\gamma^2 = \beta = \frac{\lambda}{c}$, $p = n$, $N = N_1$ в случае преобразования Лагерра, $\gamma^2 = -\beta = \frac{1}{ch}$, $p = 1$, $N = N_2 - 1$ в случае метода Ротэ.

3. Граничные интегральные уравнения

Непосредственное применение к последовательности (2.4)-(2.6) теории потенциалов приводит к интегральным уравнениям, содержащим двойные интегралы по неограниченной области D, что создает значительные трудности при численном решении. Рассматривая задачи (2.4)-(2.6) как систему, введем для нее потенциалы простого и двойного слоя [1, 5]

$$V_n(x) = -\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n}\int_\Gamma q_m(y)\Phi_{n-m}(x,y)\,ds(y) \tag{3.1}$$

и

$$U_n(x) = -\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n}\int_\Gamma q_m(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\Phi_{n-m}(x,y)\,ds(y) \tag{3.2}$$

соответственно. Здесь $q_n(x)$ — неизвестные плотности, ν — внешняя нормаль границы Γ, $\Phi_n(x,y)$ — фундаментальные решения системы (2.4), которые имеют вид

$$\Phi_n(x,y) = K_0(\gamma|x-y|)v_n(|x-y|) + K_1(\gamma|x-y|)w_n(|x-y|), \tag{3.3}$$

где $K_0(z)$ и $K_1(z)$ — функции Макдональда [2],

$$v_n(r) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} a_{n,2k}r^{2k}, \qquad w_n(r) = \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} a_{n,2k+1}r^{2k+1}$$

и коэффициенты $a_{n,m}$ определяются по известным рекуррентным формулам [5].

В результате для системы (2.4)-(2.6) получим систему интегральных уравнений первого рода

$$-\frac{1}{\pi}\int_\Gamma q_n(y)\Phi_0(x,y)\,ds(y) = f_n(x) + \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\int_\Gamma q_m(y)\Phi_{n-m}(x,y)\,ds(y) \tag{3.4}$$

или систему интегральных уравнений второго рода

$$\begin{aligned} q_n(x) &+ \frac{1}{\pi}\int_\Gamma q_n(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\Phi_0(x,y)\,ds(y) \\ &= f_n(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\int_\Gamma q_m(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\Phi_{n-m}(x,y)\,ds(y) - \sum_{m=0}^{n-1} q_m(x) \end{aligned} \tag{3.5}$$

для $n = 0, 1, \ldots, N$, $x \in \Gamma$. Как можно заметить из (3.3), ядра интегральных уравнений (3.4) и (3.5) имеют логарифмическую особенность. Единственность и существование решений таких уравнений в соответственных Банаховых пространствах показано в [5].

4. Метод тепловых потенциалов

Решение задачи (1.1)-(1.4) можно представить и в форме теплового потенциала простого слоя

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^t \int_\Gamma \mu(y,\tau)G(t-\tau,r)\,ds(y)\,d\tau \tag{4.1}$$

или двойного слоя

$$v(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^t \int_\Gamma \mu(y,\tau)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}G(t-\tau,r)\,ds(y)\,d\tau, \tag{4.2}$$

где $r = |x-y|$, $\mu(x,t)$ — неизвестная плотность, $G(t,r)$ — фундаментальное решение для (1.1).

Исходя из свойств тепловых потенциалов [3], для определения плотностей получаем следующие гранично-временные интегральные уравнения

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^t \int_\Gamma \mu(y,\tau)G(t-\tau,r)\,ds(y)\,d\tau = f(x,t) \quad \text{на} \quad \Gamma\times[0,T] \tag{4.3}$$

и

$$\mu(x,t) + \frac{1}{2\pi}\int_0^t \int_\Gamma \mu(y,\tau)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}G(t-\tau,r)\,ds(y)\,d\tau = 2f(x,t) \tag{4.4}$$

на $\Gamma\times[0,T]$.

Осуществим теперь на разбиении (2.3) дискретизацию выписанных интегральных уравнений, считая плотность μ на каждом временном промежутке кусочно постоянной. В результате из (4.3) и (4.4) получим

$$\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \mu_n(y)R_0(x,y)\,ds(y) = f_n(x) - \frac{1}{4\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\int_\Gamma \mu_m(y)R_{n-m}(x,y)\,ds(y), \tag{4.5}$$

$x\in\Gamma$, и

$$\begin{aligned}\mu_n(x) &+ \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \mu_n(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}R_0(x,y)\,ds(y)\\ &= 2f_n(x) - \frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\int_\Gamma \mu_m(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}R_{n-m}(x,y)\,ds(y), \quad x\in\Gamma,\end{aligned} \tag{4.6}$$

$n = 0,1,\ldots,N_2-1$, где

$$R_0(x,y) = E_1\left(\frac{r^2}{4h}\right), \qquad R_n(x,y) = E_1\left(\frac{r^2}{4h(n+1)}\right) - E_1\left(\frac{r^2}{4hn}\right),$$

$E_1(z)$ — интегральная показательная функция, содержащая, как известно [2], логарифмическую особенность при $z\to 0$.

5. Численное решение интегральных уравнений

Как мы видим, каждый из предложенных подходов приближенного решения начально-краевой задачи (1.1)–(1.4) приводит к системе однотипных интегральных уравнений первого или второго рода с логарифмической особенностью в ядрах. Численное решение таких уравнений можно осуществить методом квадратур с использованием квадратурных формул, построенных на основе тригонометрической интерполяции [4, 5]. Приведем схему такого метода на примере численного решения системы интегральных уравнений первого рода. Считая кривую Γ заданной параметрически и без угловых точек, после параметризации (3.4) или (4.5) получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\phi_n(\sigma)\left\{1+H_0^1(s,\sigma)\sin^2\frac{s-\sigma}{2}+H_0^2(s,\sigma)\right\}\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right)d\sigma \tag{5.1}$$

$$= g_n(s)-\frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\int_0^{2\pi}\Phi_m(\sigma)\left[H_{n-m}^1(s,\sigma)\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right)+H_{n-m}^2(s,\sigma)\right]d\sigma,$$

где $s\in[0,2\pi]$, $\phi_n(s)=\sum_{m=0}^{n}\Phi_m(s)$, функции H_n^1 и H_n^2 не имеют особенностей и их конкретный вид зависит от выбранного подхода. Введем на $[0,2\pi]$ равномерное разбиение $s_j=\frac{j\pi}{M}$, $j=0,1,\ldots,2M-1$ и рассмотрим три квадратурные формулы

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\sigma)\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{s_j-\sigma}{2}\right)d\sigma\approx\sum_{j=0}^{2M-1}f(s_j)R_{|i-j|},$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\sigma)\sin^2\frac{s_i-\sigma}{2}\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{s_i-\sigma}{2}\right)d\sigma\approx\sum_{j=0}^{2M-1}f(s_j)F_{|i-j|},$$

и

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(s)\,ds\approx\frac{1}{2M}\sum_{j=0}^{2M-1}f(s_j),$$

где весовые коэффициенты имеют вид

$$R_j=-\frac{1}{2M}\left\{1+2\sum_{m=1}^{M-1}\frac{1}{m}\cos\frac{mj\pi}{M}+\frac{(-1)^M}{M}\right\}$$

и

$$F_j=\frac{1}{2M}\left\{-\frac{1}{4}\cos\frac{j\pi}{M}+\sum_{m=2}^{M-1}\frac{1}{m(m^2-1)}\cos\frac{mj\pi}{M}+\frac{(-1)^M}{M(M^2-1)}\right\}.$$

После применения выписанных квадратурных формул в (5.1) и последующей коллокации в узлах s_i, получим последовательность систем линейных уравнений

$$\sum_{j=0}^{2M-1}\phi_n^{(M)}(s_j)\left\{R_{|i-j|}+H_0^1(s_i,s_j)F_{|i-j|}+\frac{1}{2M}H_0^2(s_i,s_j)\right\}$$

$$=g_n(s_i)-\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{2M-1}\Phi_m^{(M)}(s_j)\left\{H_{n-m}^1(s_i,s_j)R_{|i-j|}+\frac{1}{2M}H_{n-m}^2(s_i,s_j)\right\},$$

$i=0,1,\cdots,2M-1$, $n=0,1,\cdots,N$.

Анализ сходимости и оценка погрешности такого метода базируются на теории коллективно-компактных операторов и приведены в [4, 5]. Заметим, что в случае аналитических кривых и граничных функций имеет место экспоненциальная сходимость.

6. Численные примеры

Пусть граничная кривая Γ имеет параметрическое представление

$$\Gamma = \left\{x(s) = (0.2\cos s; 0.4\sin s - 0.3\sin^2 s), 0 \le s \le 2\pi\right\}$$

и граничная функция задана как

$$f(x,t) = 4t^2 \exp\{-4t + 2\}.$$

Результаты численного решения начально-краевой задачи (1.1)–(1.4) при $c = 1$ тремя изложенными подходами (с использованием интегральных уравнений первого рода) приведены в таблице. Мы иллюстрируем сходимость относительно числа M точек квадратурных формул, числа N_1 членов суммы обратного преобразования Лагерра при фиксированном $\lambda = 1$ и числа N_2 точек разбиения временного промежутка в методах Ротэ и тепловых потенциалов. Все вычисления проводились в пространственной точке наблюдения $x = (0.6; 0)$ на временном интервале [0,1].

		Метод Лагерра		Метод Ротэ		Метод потенциалов	
t	M	$N_1 = 35$	$N_1 = 40$	$N_2 = 20$	$N_2 = 40$	$N_2 = 20$	$N_2 = 40$
0.2	8	0.112273	0.112285	0.125777	—	0.118495	0.114466
	16	0.112278	0.112292	0.125782	0.119124	0.118499	0.114471
	32	0.112278	0.112292	0.125782	0.119124	0.118499	0.114471
0.4	8	0.353818	0.353833	0.356052	—	0.355261	0.354356
	16	0.353827	0.353841	0.356059	0.354857	0.355268	0.354364
	32	0.353827	0.353841	0.356059	0.354857	0.355268	0.354364
0.6	8	0.480945	0.480919	0.475882	—	0.479170	0.480315
	16	0.480952	0.480926	0.475889	0.478338	0.479178	0.480322
	32	0.480952	0.480926	0.475889	0.478338	0.479178	0.480322
0.8	8	0.488336	0.478366	0.472253	—	0.475893	0.477516
	16	0.488341	0.478371	0.472258	0.475306	0.475898	0.477521
	32	0.488341	0.478371	0.472258	0.475306	0.475898	0.477521
1.0	8	0.407344	0.407332	0.402685	—	0.405221	0.406585
	16	0.407347	0.407335	0.402688	0.405013	0.405224	0.406588
	32	0.407347	0.407335	0.402688	0.405013	0.405224	0.406588

Литература

1. В. А. Галазюк, Р. С. Хапко, *Методы интегрального преобразования Чебышова–Лагерра и интегральных уравнений в начально-краевых задачах для телеграфного уравнения*, Докл. АН УССР, Серия А **8** (1990), 11–14.
2. М. Абрамовиц, М. Стиган (ред.), *Справочник по специальным функциям.*, “Наука”, Москва, 1979.
3. А. Фридман, *Уравнения с частными производными параболического типа*, “Мир”, Москва, 1968.
4. R. Chapko, R. Kress, *On a quadrature method for a logarithmic integral equation of the first kind*, In. World Scientific Series in Applicable Analisis **2** (1993), Coutributions in Numerical Mathematics (Agrawal ed.) World Scientific, Singapore, 127–140.
5. R. Chapko, R. Kress, *On the numerical solution of initial boundary value problems by the Laguerre transformation and boundary integral equations*, Iso.

ЛЬВОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И. ФРАНКО, 290602, ЛЬВОВ, УЛ. УНИВЕРСИТЕТСКАЯ, 1

Поступила 11.10.96