Обчислювальна та прикладна математика
Вип. 82, 1997, стор. 97–101

Computational and Applied Mathematics
No. 82, 1997, pp. 97–101

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ НА МНОЖЕСТВЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ПОЛИНОМОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

УДК 519.65:62–50

В. В. ХЛОБЫСТОВ

РЕЗЮМЕ. Приведены решения двух экстремальных задач: обобщение результата У.Портера [1] об интерполяционном полиноме в $L_2(a,b)$ с минимальной нормой, полученное здесь в абстрактном гильбертовом пространстве с мерой, и аналог теоремы Голомба–Вайнбергера [2] для ограниченного множества операторных интерполянтов.

Пусть X, Y — вещественные гильбертовы пространства, (X — сепарабельное), Π_n — множество непрерывных операторных полиномов p: $X \to Y$ степени n вида

$$p(x) = L_0 + L_1 x + L_2 x^2 + \cdots + L_n x^n. \tag{1}$$

Здесь $L_0 \in Y$, $L_k x^k = L_k(x, x, \ldots, x): X \to Y$, $k = \overline{1,n}$ k-я операторная степень, которая получается из k-линейного симметричного оператора
$L_k(v_1, v_2, \ldots, v_k): X^k \to Y$ при $v_1 = v_2 = \cdots = v_k = x$ [3].

Пусть μ некоторая мера на X такая, что её первый момент равен нулю, а второй ограничен, B — корреляционный оператор меры μ с $KerB = \vec{0}$, $\{x_i\}_1^m$ система элементов из X,

$$V = \left\| \sum_{p=0}^{n} (Bx_i, x_j)^p \right\|_{i,j=1}^{m},$$

$(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в X, $\vec{p} = (p(Bx_1), p(Bx_2), \ldots, p(Bx_m)) \in Y^m$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_m) \in Y^m$ задан. Известно [4], что множество Π_n^1 операторных полиномов $p \in \Pi_n$, удовлетворяющих условию $\vec{p} = \vec{q}$ непусто в том и только том случае, когда

$$Z\vec{y} = \vec{0}, \tag{2}$$

где Z матрица, строками которой являются линейно независимые собственные векторы матрицы V с нулевым собственным числом. При этом все множество Π_n^1 таких полиномов в гильбертовом пространстве X описывается формулой

$$p(x) = q(x) + \left\langle \vec{y} - \vec{q}, V^+ \sum_{p=0}^{n} \left\{ (x_i, x)^p \right\}_1^m \right\rangle, \tag{3}$$

где q пробегает Π_n, V^+ — псевдообратная матрица Мура–Пенроуза к матрице V, $\langle a, b \rangle = \sum a_i b_i$, $a_i \in Y$, $b_i \in R_1$, $i = \overline{1,m}$,
$\vec{q} = (q(Bx_1), q(Bx_2), \ldots, q(Bx_m)) \in Y^m$.

Попутно отметим, что задача полиномиального операторного интерполирования $\vec{p} = \vec{y}$, $p \in \Pi_n$ разрешима (т.е. полином, удовлетворяющий таким условиям, существует) независимо от $\vec{y}$ в том и только в том случае, когда матрица V обратима. Действительно, достаточность этого условия очевидна, докажем необходимость. Пусть $\vec{p} = \vec{y}$, $p \in \Pi_n$, а симметричная идемпотентная матрица $A = E - V^+V$ (E — единичная матрица) отлична от нулевой. Тогда, поскольку $A\vec{p} = \vec{0}$ [3], то $A\vec{y} = \vec{0}$ при любом $\vec{y}$. Это в свою очередь означает, что $A = 0$ и, следовательно, V обратима.

Пусть условие (2) выполнено. Представим (3) в виде

$$p(x) = p_0(x) + q_0(x), \tag{4}$$

$$p_0(x) = \left\langle \vec{y}, V^+ \sum_{p=0}^{n} \{(x_i, x)^p\}_1^m \right\rangle \tag{5}$$

$$q_0(x) = q(x) - \left\langle \vec{q}, V^+ \sum_{p=0}^{n} \{(x_i, x)^p\}_1^m \right\rangle, \quad q \in \Pi_n. \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что полином $q_0(x)$ удовлетворяет условию $\vec{q}_0 = \vec{0}$.

Оснастим множество Π_n скалярным произведением

$$\begin{aligned}(p_1, p_2) = \sum_{k=0}^{n} \int_X \cdots \int_X \Big(\frac{1}{k!} p_1^{(k)}(0) v_k v_{k-1} \dots v_1, \\ \times \frac{1}{k!} p_2^{(k)}(0) v_k v_{k-1} \dots v_1 \Big)_Y \mu(dv_k)\, \mu(dv_{k-1}) \dots \mu(dv_1) \\ = \sum_{k=0}^{n} \int_X \cdots \int_X \Big(L_k^{(1)}(v_1, v_2, \dots, v_k), L_k^{(2)}(v_1, v_2, \dots, v_k) \Big)_Y \\ \times \mu(dv_k)\, \mu(dv_{k-1}) \dots \mu(dv_1),\end{aligned}$$

$p_1, p_2 \in \Pi_n$ и соответственно нормой

$$\|p\| = \left(\sum_{k=0}^{n} \int_X \cdots \int_X \left\| L_k(v_1, v_2, \dots, v_k) \right\|_Y^2 \mu(dv_k) \dots \mu(dv_1) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad p \in \Pi_n.$$

Здесь $p^{(k)}(0) v_k v_{k-1} \dots v_1$ — дифференциал Гато к-го порядка оператора p в нуле по направлениям $v_1, v_2, \dots, v_k$, $L_k^{(1)}$, $L_k^{(2)}$, L_k k-е операторные степени полиномов p_1, p_2, p соответственно, $(\cdot, \cdot)_Y$ — скалярное произведение в Y.

В данной работе приведем два экстремальных свойства полинома $p_0(x)$ на множестве Π_n^1.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (2). *Тогда полином* $p_0(x)$, *определяемый формулой* (5), *является единственным решением экстремальной задачи*

$$\|p_0\| = \inf \|p\|, \qquad q \in \Pi_n, \tag{7}$$

при этом $\|p_0\| = \left(\langle\langle V^+\vec{y}, \vec{y}\rangle\rangle\right)^{\frac{1}{2}}$. *Здесь* $p(x)$ *множество интерполяционных полиномов, которое описывается формулой* (3), $\langle\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle\rangle = \sum (a_i, b_i)_Y$.

Доказательство. Имеем

$$\|p\|^2 = \|p_0 + q_0\|^2 = \|p_0\|^2 + \|q_0\|^2 + 2(p_0, q_0). \tag{8}$$

Покажем что $(p_0, q_0) = 0$. Обозначим k-е операторные степени полинома $q_0(x)$ через $L_k^{(0)}$, $\vec{z} = V^+\vec{y} = (z_1, z_2, \ldots, z_m) \in Y^m$. Тогда, используя равенство [5]

$$\int_X \cdots \int_X \prod_{j=1}^{p} (x_j, v_j)(y, L_p(v_1, v_2, \ldots, v_p))_Y \, \mu(dv_p) \ldots \mu(dv_1)$$
$$= (y, L_p(Bx_1, Bx_2, \ldots, Bx_p))_Y, \qquad y \in Y,$$

получим

$$\begin{aligned}(p_0, q_0) &= \left(\left\langle \vec{y}, V^+ \sum_{p=0}^{n} \{(x_i, x)^p\}_1^m \right\rangle, q_0(x)\right)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} z_i \sum_{p=0}^{n} (x_i, x)^p, q_0(x)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{p=0}^{n} \int_X \cdots \int_X \prod_{j=1}^{p} (x_i, v_j)\big(z_i, L_p^{(0)}(v_1, v_2, \ldots, v_p)\big)_Y\\
&\times \mu(dv_p)\, \mu(dv_{p-1}) \ldots \mu(dv_1)\\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{p=0}^{n} (z_i, L_p^{(0)}(Bx_i, Bx_i, \ldots, Bx_i))_Y\\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(z_i, \sum_{p=0}^{n} L_p^{(0)}(Bx_i, Bx_i, \ldots, Bx_i)\right)_Y\\
&= \sum_{i=1}^{m} \big(z_i, q_0(Bx_i)\big)_Y = \big\langle\big\langle V^+\vec{y}, \vec{q}_0 \big\rangle\big\rangle = 0,\end{aligned} \tag{9}$$

поскольку $\vec{q}_0 = \vec{0}$.

С учетом (8), (9) имеем

$$\|p_0 + q_0\|^2 = \|p_0\|^2 + \|q_0\|^2 \geq \|p_0\|^2 \tag{10}$$

и равенство достигается при $q_0 \equiv 0$. Таким образом, на основании (10) соотношение (7) доказано. Заменив в (9) q_0 на p_0, получим

$$\|p_0\|^2 = (p_0, p_0) = \sum_{i=1}^{m} \big(z_i, p_0(Bx_i)\big)_Y = \big\langle\big\langle V^+\vec{y}, \vec{y} \big\rangle\big\rangle.$$

Далее, пусть $r_0(x)$ другой полином из Π_n, для которого

$$\|r_0\|^2 = \big\langle\big\langle V^+\vec{y}, \vec{y} \big\rangle\big\rangle. \tag{11}$$

Представим $r_0(x)$ в виде

$$r_0(x) = s_0(x) + \left\langle \vec{y} - \vec{s}_0, V^+ \sum_{p=0}^{n} \{(x_i, x)^p\}_1^m \right\rangle, \qquad s_0 \in \Pi_n, \tag{12}$$

так как при выполнении условия (2) формула (3) описывает все множество интерполяционных операторных полиномов n-й степени в гильбертовом пространстве X. Используя методику вычисления скалярного произведения в (9), получим

$$\|r_0\|^2 = \|s_0\|^2 - \big\langle\big\langle V^+\vec{s}_0, \vec{s}_0 \big\rangle\big\rangle + \big\langle\big\langle V^+\vec{y}, \vec{y} \big\rangle\big\rangle.$$

С учетом (11) имеем

$$\|s_0\|^2 - \langle\langle V^+\vec{s}_0, \vec{s}_0\rangle\rangle = 0. \tag{13}$$

Поскольку равенство (13) выполняется лишь в случае

$$s_0(x) = \left\langle \vec{s}_0, V^+ \sum_{p=0}^{n} \{(x_i, x)^p\}_1^m \right\rangle,$$

то, согласно (12), получим

$$r_0(x) = s_0(x) + \left\langle \vec{y}, V^+ \sum_{p=0}^{n} \{(x_i, x)^p\}_1^m \right\rangle - \left\langle \vec{s}_0, V^+ \sum_{p=0}^{n} \{(x_i, x)^p\}_1^m \right\rangle$$

$$= \left\langle \vec{y}, V^+ \sum_{p=0}^{n} \{(x_i, x)^p\}_1^m \right\rangle = p_0(x).$$

Тем самым единственность решения экстремальной задачи (7) и, соответственно, теорема 1 доказаны. □

Эта теорема допускает и такую интерпретацию: при выполнении условия (2) интерполяционный полином $p_0(x)$ во введенной метрике имеет минимальную норму. Теорема 1 является обобщением теоремы У.Портера [1], доказанной для гильбертова функционального пространства $L_2(a,b)$.

Замечание 1. Имеет место неравенство

$$\|\langle\langle V^+\vec{q}, \vec{q}\rangle\rangle\| \le q^2, \qquad \forall q \in \Pi_n,$$

которое следует из соотношения

$$\|p\|^2 = \|q\|^2 - \langle\langle V^+\vec{q}, \vec{q}\rangle\rangle + \langle\langle V^+\vec{y}, \vec{y}\rangle\rangle, \qquad q \in \Pi_n.$$

Пусть условие (2) выполнено. Рассмотрим множество полиномов $\Omega(c)$ из Π_n вида

$$\Omega(c) = \{p\colon p \in \Pi_n, \vec{p} = \vec{y}, \|p\| \le c\}.$$

Здесь $\vec{y} \in Y^m$ и $c =$const> 0 заданы, причем c такое, что $\Omega(c) \ne \varnothing$, т.е. выполнено неравенство $\langle\langle V^+\vec{y}, \vec{y}\rangle\rangle \le c^2$. Множество $\Omega(c)$ является выпуклым и ограниченным в Π_n. Пусть $h(p)$ линейный непрерывный функционал, определенный на множестве $\Omega(c)$. Когда p пробегает $\Omega(c)$, $h(p)$ пробегает ограниченное, выпуклое множество в R_1, т.е. интервал (α, β). Наилучшим приближенным значением для $h(p)$ будет чебышевский центр области неопределенности его значений — середина интервала (α, β). Имеет место аналог теоремы Голомба–Вайнбергера [2] для множества операторных полиномов из $\Omega(c)$.

Теорема 2. *Середина интервала* $(\alpha, \beta) = h(\Omega(c))$ *равна* $h(p_0)$, *где* $p_0(x)$ *определяется формулой* (5).

Доказательство. Принадлежность p_0 множеству $\Omega(c)$ следует из теоремы 1. Покажем, что p_0 является центром симметрии множества $\Omega(c)$, т.е. из $p_0 + g \in \Omega(c)$, $g \in \Pi_n$ имеем $p_0 - g \in \Omega(c)$. Действительно, если $p_0 + g \in \Omega(c)$, то $\vec{p}_0 + \vec{g} = \vec{y}$, значит $\vec{g} = \vec{0}$ и $\vec{p}_0 - \vec{g} = \vec{y}$. Но поскольку $(p_0, g) = 0$, то

$$\|p_0 - g\|^2 = \|p_0 + g\|^2 \le c^2.$$

Следовательно $p_0 - g \in \Omega(c)$ и $h(\Omega(c))$ выпуклое множество в R_1 с центром симметрии $h(p_0) = (\alpha + \beta)/2$. Теорема доказана. □

Замечание 2. В [6] рассмотрена, так называемая, L проблема — о существовании интерполяционного линейного функционала в банаховом пространстве, норма которого не превосходит L.

На основании теоремы 1 можно сформулировать следующий результат.

Теорема 3. *На множестве Π_n непрерывных операторных полиномов n-й степени в гильбертовом пространстве L проблема разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$Z\vec{y} = \vec{0}, \qquad \langle\langle V^{+}\vec{y}, \vec{y}\rangle\rangle \leq L^2.$$

Литература

1. W. A. Porter, *Synthesis of polynomic systems*, SIAM J.Math.Anal. **11** (1980), № 2, 308–315.
2. M. Golomb, H. Weinberger, *Optimal approximation and error bounds*, On numerical approximation, Univ. of Wisc., 1958, стор. 117–190.
3. В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, "Наука", Москва, 1980.
4. Е. Ф. Кашпур, В. Л. Макаров, В. В. Хлобыстов, *К задаче эрмитовой интерполяции операторов в гильбертовом пространстве*, Обчислювальна та прикладна матем. (1994), № 78, 38–49.
5. В. В. Хлобистов, *Згладжуючий операторний поліном в гільбертовому просторі $H(\lambda)$*, Обчислювальна та прикладна матем. (1993), № 77, 27–34.
6. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи*, "Наука", Москва, 1973.

КИЕВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. ТАРАСА ШЕВЧЕНКО, ФАКУЛЬТЕТ КИБЕРНЕТИКИ, 252601, КИЕВ, УЛ. ВЛАДИМИРСКАЯ 64

Поступила 06.10.96