Обчислювальна та прикладна математика
Вип. 82, 1997, стор. 102–108

Computational and Applied Mathematics
No. 82, 1997, pp. 102–108

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПОЛИНОМОВ ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

УДК 519.65: 62.50

В. В. ХЛОБЫСТОВ

РЕЗЮМЕ. На основании результатов [1] получены решения двух экстремальных задач на множествах интерполяционных полиномов функций многих переменных.

Вначале кратко изложим два результата в [1], которые понадобятся нам для дальнейшего исследования.

Пусть X, Y — вещественные гильбертовы пространства (X — сепарабельное), Π_n — множество непрерывных операторных полиномов p: $X \to Y$ степени n вида

$$p_0(x) = L_0 + L_1 x + L_2 x^2 + \cdots + L_n x^n, \tag{1}$$

где $L_0 \in Y$, $L_k x^k = L_k(x, x, \ldots, x)$, $k = \overline{1,n}$ k-я операторная степень, которая получается из k-линейного симметричного оператора
$L_k(v_1, v_2, \ldots, v_k)$: $X^k \to Y$ при $v_1 = v_2 = \cdots = v_k = x$.

Пусть μ некоторая мера на X такая, что её первый момент равен нулю, а второй ограничен, B — корреляционный оператор меры μ с $Ker B = 0$, $\{x_i\}_1^m$ система элементов из X,

$$V = \left\| \sum_{p=0}^{n} (Bx_i, x_j)^p \right\|_{i,j=1}^{m},$$

$(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в X, $\vec{p} = \{p(Bx_i\}_1^m \in Y^m$, а $\vec{y} = \{y_i\}_1^m \in Y^m$ задан. Известно [2], что множество полиномов $\Pi_n^1 \in \Pi_n$, удовлетворяющих условию $\vec{p} = \vec{y}$, непусто в том и только том случае, когда

$$Z\vec{y} = \vec{0}, \tag{2}$$

где Z матрица, строками которой являются координаты линейно независимых собственных векторов матрицы V с нулевым собственным числом. При этом все множество Π_n^1 таких полиномов в гильбертовом пространстве X описывается формулой

$$p(x) = q(x) + \left\langle \vec{y} - \vec{q}, V^+ \sum_{p=0}^{n} \left\{ (x_i, x)^p \right\}_1^m \right\rangle, \tag{3}$$

где q пробегает Π_n, V^+ — псевдообратная матрица Мура–Пенроуза к матрице V, $\langle a, b \rangle = \sum a_i b_i$, $a_i \in Y$, $b_i \in R_1$, $i = \overline{1,m}$, $\vec{q} = \{q(Bx_i\}_1^m \in Y^m$.

Оснастим множество Π_n скалярным произведением

$$(p_1, p_2) = \sum_{k=0}^{n} \int_X \cdots \int_X \left(L_k^{(1)}(v_1, v_2, \ldots, v_k), L_k^{(2)}(v_1, v_2, \ldots, v_k)\right)_Y \\ \times \mu(dv_k)\, \mu(dv_{k-1}) \ldots \mu(dv_1),$$

и соответственно нормой

$$\|p\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \int_X \cdots \int_X \left\|L_k(v_1, v_2, \ldots, v_k)\right\|_Y^2 \mu(dv_k) \ldots \mu(dv_1).$$

Здесь $L_k^{(1)}$, $L_k^{(2)}$, L_k k-линейные операторные формы полиномов p_1, p_2, p соответственно, $(\cdot,\cdot)_Y$ — скалярное произведение в Y.

Обозначим

$$p_0(x) = \left\langle \vec{y}, V^+ \sum_{p=0}^{n} \{(x_i, x)^p]bigr\}_1^m \right\rangle. \tag{5}$$

Имеет место аналог теоремы У.Портера [3] для операторных полиномов из Π_n^1.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (2). *Тогда полином* $p_0(x)$, *определяемый формулой* (5), *является единственным решением экстремальной задачи*

$$\|p_0\| = \left(\langle\langle V^+\vec{y}, \vec{y}\rangle\rangle\right)^{\frac{1}{2}} = \inf \|p\|, \qquad q \in \Pi_n. \tag{6}$$

Здесь $p(x)$ — *множество интерполяционных полиномов, которое описывается формулой* (3),

$$\langle\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle\rangle = \sum (a_i, b_i)_Y, \qquad a_i, b_i \in Y, \quad i = \overline{1, m}..$$

Пусть условие (2) выполнено. Рассмотрим множество $\Omega(c) = \{p\colon p \in \Pi_n,\ \vec{p} = \vec{y},\ \|p\| \le c\}$.

Здесь $\vec{y} \in Y^m$ и $c =$const> 0 заданы, причем c такое, что $\Omega(c) \neq \varnothing$, т.е. выполнено неравенство $\langle\langle V^+\vec{y}, \vec{y}\rangle\rangle \le c^2$. Множество $\Omega(c)$ выпукло и ограничено в Π_n. Пусть $h(p)$ линейный непрерывный вещественный функционал, определенный на $\Omega(c)$. Когда p пробегает $\Omega(c)$, $h(p)$ пробегает ограниченное, выпуклое множество в R_1, т.е. интервал (α, β). Наилучшим приближенным значением для $h(p)$ будет чебышевский центр области неопределенности его значений — середина интервала (α, β). Имеет место аналог теоремы Голомба–Вайнбергера [4] для множества операторных полиномов из $\Omega(c)$.

Теорема 2. *Середина интервала* $(\alpha, \beta) = h(\Omega(c))$ *равна* $h(p_0)$, *где* $p_0(x)$ *определяется формулой* (5).

Перейдем теперь к интерпретации этих результатов для интерполяционных полиномов функций многих переменных. Вначале рассмотрим одномерный случай.

Пусть $X = R_1 = (-\infty, \infty)$,

$$\mu(dt) = f(t)dt = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt.$$

Тогда

$$\int_X (x_1, x)(x_2, x)\, \mu(dx) = (Bx_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 x^2 f(x)\, dx = x_1 x_2 = (Ix_1, x_2),$$

где I — единичный оператор, $I\colon R_1 \to R_1$ и скалярное произведение в R_1 — это произведение чисел. Матрица V при $B = I$, $X = R_1$ примет вид

$$V = \left\| \sum_{p=0}^{n} (x_i x_j)^p \right\|_{i,j=1}^{m} = AA',$$

где

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^n \end{matrix} \right\|.$$

Поскольку $V^+ = (AA')^+ = (A^+)'A^+$, то при выполнении (2) все множество интерполяционных полиномов в R_1 и интерполянт $p_0(x)$ можно записать в форме

$$p(x) = q(x) + \left(A^+\vec{y} - A^+\vec{q}, A^+ \sum_{p=0}^{n} (x_i x)^p \Big|_1^m \right), \qquad q \in \Pi_n, \tag{6a}$$

Π_n — множество полиномов n-й степени одной переменной,

$$p_0(x) = \left(A^+\vec{y}, A^+ \sum_{p=0}^{n} (x_i, x)^p \Big|_1^m \right), \tag{7}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в R_m. Отметим, как показано в [2], что если $m = n + 1$, то $p(x) \equiv p_0(x)$, т.е. множество (6a) содержит единственный интерполяционный полином вида (7). Вычислим норму полинома

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n\colon R_1 \to R_1.$$

Имеем при $X = R_1$

$$\begin{aligned} \|p\|^2 &= \sum_{k=0}^{n} \int_X \cdots \int_X \left\| L_k(v_1, v_2, \ldots, v_k) \right\|_Y^2 \mu(dv_k),\ \mu(dv_{k-1}), \ldots \mu(dv_1) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} (a_k v_1, v_2, \ldots, v_k)^2 f(v_k) \cdots f(v_1)\, dv_k \cdots dv_1 = \sum_{k=0}^{n} a_k^2. \end{aligned}$$

Таким образом для $X = R_1$ имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть выполнено условие* (2). *Тогда полином* $p_0(x)$, *представленный формулой* (7), *является единственным решением экстремальной задачи*

$$\|p_0\| = \|A^+\vec{y}\| = \inf \|p\|, \qquad q \in \Pi_n.$$

Здесь $p(x)$ — *множество интерполяционных полиномов, которое описывается формулой* (6a).

Пусть

$$h(p) = \int_0^1 p(x)\, dx, \quad p \in \Omega(c) = \{p\colon p \in \Pi_n,\ \vec{p} = \vec{y},\ \|p\| \le c\},$$

$\Omega(c)$ — выпуклое ограниченное множество интерполяционных полиномов степени n, $h(\Omega(c)) = (\alpha, \beta)$. Тогда имеет место следующий результат.

Теорема 4. *Середина интервала* (α,β) *равна*

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=h(p_0)=\left(A^+\vec{y},A^+\sum_{p=0}^{n}(1+p)^{-1}x_i^p\Big|_1^m\right).$$

Доказательство основано на теореме 2 и формуле (7).

Пусть теперь $X=R_2=(-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty)$, $x_1=(\alpha_1,\beta_1)$, $x_2=(\alpha_2,\beta_2)$, $x=(\xi_1,\xi_2)$. Тогда

$$\begin{aligned}&\int_X(x_1,x)(x_2,x)\,\mu(dx)\\&\qquad=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\alpha_1\xi_1+\beta_1\xi_2)(\alpha_2\xi_1+\beta_2\xi_2)f(\xi_1)f(\xi_2)|,d\xi_1\,d\xi_2\\&\qquad=(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2)=(x_1,x_2)=(Ix_1,x_2).\end{aligned}$$

Таким образом, в качестве оператора B в случае $X=R_2$ может быть выбран единичный оператор I: $R_2\to R_2$. Далее, пусть $x_i=(\alpha_i,\beta_i)$, $i=\overline{1,m}$. Тогда

$$V=\left\|\sum_{p=0}^{n}(x_i,x_j)^p\right\|_{i,j=1}^{m}=\left\|\sum_{p=0}^{n}(\alpha_i\alpha_j+\beta_i\beta_j)^p\right\|_{i,j=1}^{m}=CC',\tag{8}$$

$$C=\left\|\begin{matrix}1&\alpha_1&\beta_1&\alpha_1^2&\sqrt{2}\alpha_1\beta_1&\beta_1^2&\cdots&\alpha_1^n\\1&\alpha_2&\beta_2&\alpha_2^2&\sqrt{2}\alpha_2\beta_2&\beta_2^2&\cdots&\alpha_2^n\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdots&\cdot\\1&\alpha_m&\beta_m&\alpha_m^2&\sqrt{2}\alpha_m\beta_m&\beta_m^2&\cdots&\alpha_m^n\end{matrix}\right.$$

$$\times\left.\begin{matrix}\sqrt{C_n^1}\alpha_1^{n-1}\beta_1&\cdots&\sqrt{C_n^1}\alpha_1\beta_1^{n-1}&\beta_1^n\\\sqrt{C_n^1}\alpha_2^{n-1}\beta_2&\cdots&\sqrt{C_n^1}\alpha_2\beta_2^{n-1}&\beta_2^n\\\cdot&\cdots&\cdot&\cdot\\\sqrt{C_n^1}\alpha_m^{n-1}\beta_m&\cdots&\sqrt{C_n^1}\alpha_m\beta_m^{n-1}&\beta_m^n\end{matrix}\right\|$$

Запишем полином n-й степени двух переменных в виде

$$\begin{aligned}p(x,y)&=a_0^{(0)}+a_1^{(1)}x+a_2^{(1)}y+a_{11}^{(2)}x^2+2a_{12}^{(2)}xy+a_{22}^{(2)}y^2\\&+a_{111}^{(3)}x^3+3a_{112}^{(3)}x^2y+3a_{122}^{(3)}xy^2+a_{222}^{(3)}y^3+\cdots\\&+a_{11\ldots1}^{(n)}x^n+C_n^1a_{11\ldots12}^{(n)}x^{n-1}y+\cdots C_n^1a_{12\ldots2}^{(n)}xy^{n-1}+a_{22\ldots2}^{(n)}y^n.\end{aligned}$$

Лемма 1. *В случае* $X=R_2$ *норма в* (4) *вычисляется по формуле*

$$\begin{aligned}\|p\|^2&=(a_0^{(0)})^2+(a_1^{(1)})^2+(a_2^{(1)})^2+(a_{11}^{(2)})^2+2(a_{12}^{(2)})^2+(a_{22}^{(2)})^2\\&+(a_{111}^{(3)})^2+3(a_{112}^{(3)})^2+3(a_{122}^{(3)})^2+(a_{222}^{(3)})^2+\cdots\\&+(a_{11\ldots1}^{(n)})^2+C_n^1(a_{11\ldots12}^{(n)})^2+\cdots+C_n^1(a_{12\ldots2}^{(n)})^2+(a_{22\ldots2}^{(n)})^2.\end{aligned}\tag{9}$$

Во избежание громоздких выкладок вычислим интегралы от квадратов норм k-линейных операторных форм первых порядков. Имеем

$$L_1(v)=(a,v)=\left(a_1^{(1)}\xi_1^{(1)}+a_2^{(1)}\xi_2^{(1)}\right),\quad a=\left(a_1^{(1)},a_2^{(1)}\right),\quad v=\left(\xi_1^{(1)},\xi_2^{(1)}\right),$$

$$\begin{aligned}\int_X\left\|L_1(v)\right\|^2\mu(dv)&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(a_1^{(1)}\xi_1^{(1)}+a_2^{(1)}\xi_2^{(1)}\right)^2f(\xi_1^{(1)})f(\xi_2^{(1)})\,d\xi_1^{(1)}\,d\xi_2^{(1)}\\&=(a_1^{(1)})^2+(a_2^{(1)})^2;\end{aligned}$$

$$L_2(v_1,v_2)=\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}^{(2)}\xi_i^{(1)}\xi_j^{(2)}, \quad v_i=\left(\xi_1^{(i)},\xi_2^{(i)}\right), \quad i=1,2,$$

$$\int_X\int_X \left\|L_2(v_1,v_2)\right\|^2 \mu(dv_2)\,\mu(dv_1)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}^{(2)}\xi_i^{(1)}\xi_j^{(2)}\right)^2 \prod_{i=1}^{2} f(\xi_1^{(i)})f(\xi_2^{(i)})\,d\xi_1^{(i)}\,d\xi_2^{(i)}$$
$$=\sum_{i,j=1}^{2}\left(a_{ij}^{(2)}\right)^2.$$

Учитывая симметричность коэффициентов $a_{ij}^{(2)}$, получим

$$\int_X\int_X \left\|L_2(v_1,v_2)\right\|^2 \mu(dv_2)\,\mu(dv_1)=(a_{11}^{(2)})^2+2(a_{12}^{(2)})^2+(a_{22}^{(2)})^2.$$

Пусть $v_i=(\xi_1^{(i)},\xi_2^{(i)})$, $i=1,2,3$. Тогда

$$\int_X\int_X\int_X \left\|L_3(v_1,v_2,v_3)\right\|^2 \mu(dv_3)\,\mu(dv_2)\,\mu(dv_1)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{i,j,k=1}^{2} a_{ijk}^{(3)}\xi_i^{(1)}\xi_j^{(2)}\xi_k^{(3)}\right)^2 \prod_{i=1}^{3} f(\xi_1^{(i)})f(\xi_2^{(i)})\,d\xi_1^{(i)}\,d\xi_2^{(i)}$$
$$=\sum_{i,j,k=1}^{2}\left(a_{ijk}^{(3)}\right)^2.$$

С учетом симметрии коэффициентов $a_{ijk}^{(3)}$

$$\int_X\int_X\int_X \left\|L_3(v_1,v_2,v_3)\right\|^2 \mu(dv_3)\,\mu(dv_2)\,\mu(dv_1)$$
$$=(a_{111}^{(3)})^2+3(a_{112}^{(3)})^2+3(a_{122}^{(3)})^2+(a_{222}^{(3)})^2.$$

Аналогично вычисляются интегралы от квадратов норм k-линейных форм высших порядков и, следовательно, формула (9) справедлива. Принимая во внимание (3), (8), все множество интерполяционных полиномов для функций двух переменных (при условии выполнения соотношения (2)), а также полином p_0 могут быть записаны в виде

$$p(x,y)=q(x,y)+\left(C^+\vec{y}-C^+\vec{q},C^+\sum_{p=0}^{n}(\alpha_i x+\beta_i y)^p\Big|_1^m\right), \tag{10}$$

$$p_0(x,y)=\left(C^+\vec{y},C^+\sum_{p=0}^{n}(\alpha_i x+\beta_i y)^p\Big|_1^m\right), \tag{11}$$

$q(x,y)\in\Pi_n$, Π_n — множество полиномов n-й степени двух переменных. Имеет место следующая

Теорема 5. *Пусть выполнено условие* (2). *Тогда полином* $p_0(x,y)$, *представленный формулой* (11), *является единственным решением экстремальной задачи*

$$\|p_0\|=\|C^+\vec{y}\|=\inf\|p\|, \qquad q\in\Pi_n.$$

Здесь $p(x,y)$ — *множество интерполяционных полиномов, которое описывается формулой* (10).

Пусть

$$h(p) = \int_0^1 \int_0^1 p(x,y)\,dx\,dy, \quad p \in \Omega(c) = \{p\colon p \in \Pi_n,\ \vec{p} = \vec{y},\ \|p\| \le c\},$$

$\Omega(c)$ — выпуклое ограниченное множество интерполяционных полиномов степени n, $h(\Omega(c)) = (\alpha, \beta)$.

Теорема 6. *Середина интервала* (α,β) *равна*

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = h(p_0) = \Bigg(C^+\vec{y}, C^+\sum_{p=0}^{n}(1+p)^{-1}(p+2)^{-1}(\alpha_i\beta_i)^{-1} \times \left[(\alpha_i+\beta_i)^{p+2} - (\alpha_i)^{p+2} - (\beta_i)^{p+2}\right]\Big|_1^m\Bigg).$$

Доказательство основано на теореме 2 и формуле (11). Проводя рассуждения аналогичные приведенным выше, можем получить результаты теорем 3–6 — для интерполяционных полиномов функций многих переменных, т.е. для случая $X = R_k$, $k = 1,2,3\ldots$. Тогда матрица V примет вид

$$V = \left\|\sum_{p=0}^{n}(x_i,x_j)^p\right\|_{i,j=1}^{m} = \left\|\sum_{p=0}^{n}(\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j + \cdots + \gamma_i\gamma_j)^p\right\|_{i,j=1}^{m},$$

где $x_i = (\alpha_i, \beta_i, \ldots, \gamma_i) \in R_k$, $i = \overline{1,m}$.

Далее, V можем записать в виде $V = DD'$, где

$$D = \left\|\begin{matrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 & \cdots & \gamma_1 & \alpha_1^2 & \beta_1^2 & \cdots & \gamma_1^2 \\ 1 & \alpha_2 & \beta_2 & \cdots & \gamma_2 & \alpha_2^2 & \beta_2^2 & \cdots & \gamma_2^2 \\ . & . & . & \cdots & . & . & . & \cdots & . \\ 1 & \alpha_m & \beta_m & \cdots & \gamma_m & \alpha_m^2 & \beta_m^2 & \cdots & \gamma_m^2 \end{matrix}\right.$$

$$\times \left.\begin{matrix} \sqrt{2}\alpha_1\beta_1 & \cdots & \sqrt{2}\alpha_1\gamma_1 & \cdots \\ \sqrt{2}\alpha_2\beta_2 & \cdots & \sqrt{2}\alpha_2\gamma_2 & \cdots \\ . & \cdots & . & \cdots \\ \sqrt{2}\alpha_m\beta_m & \cdots & \sqrt{2}\alpha_m\gamma_m & \cdots \end{matrix}\right\|$$

и результаты теорем 3–6 можно перенести на многомерный случай. При этом все множество интерполяционных полиномов и экстремальный интерполянт записываются следующим образом

$$p(t_1,t_2,\ldots,t_k) = q(t_1,t_2,\ldots,t_k) + \left(D^+\vec{y} - D^+\vec{q}, D^+\sum_{p=0}^{n}(\alpha_i t_1 + \beta_i t_2 + \cdots + \gamma_i t_k)^p\Big|_1^m\right),$$

$q \in \Pi_n$, Π_n — множество полиномов n-й степени k-переменных,

$$p_0(t_1,t_2,\ldots,t_k) = \left(D^+\vec{y}, D^+\sum_{p=0}^{n}(\alpha_i t_1 + \beta_i t_2 + \cdots + \gamma_i t_k)^p\Big|_1^m\right), \quad \|p_0\| = \|D^+\vec{y}\|.$$

Литература

1. В. В. Хлобыстов, *Об экстремальных задачах на множестве интерполяционных операторных полиномов в гильбертовом пространстве*, Труды конференции INAMTAP 96, Kiev, 1996, стор. 64.
2. В. Л. Макаров, В. В. Хлобыстов, *Полиномиальное интерполирование операторов*, Обчислювальна та прикладна матем. (1995), № 79, 10–116.
3. W. A. Porter, *Synthesis of polynomic systems*, SIAM J.Math.Anal. **11** (1980), № 2, 308–315.
4. M. Golomb, H. Weinberger, *Optimal approximation and error bounds*, On numerical approximation, Univ. of Wisc., 1958, стор. 117–190.

КИЕВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. ТАРАСА ШЕВЧЕНКО, ФАКУЛЬТЕТ КИБЕРНЕТИКИ, КИЕВ, 252601, УЛ. ВЛАДИМИРСКАЯ 64

Поступила 11.10.96