Обчислювальна та прикладна математика
Вип. 82, 1997, стор. 109–111

Computational and Applied Mathematics
No. 82, 1997, pp. 109–111

О СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПРОЦЕССА К ЦЕЛОМУ ОПЕРАТОРУ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

УДК 519.65: 62.50

В. В. ХЛОБЫСТОВ

РЕЗЮМЕ. Для целого оператора в гильбертовом пространстве рассмотрен интерполяционный операторный полином достаточно простой структуры. Доказана теорема о поточечной сходимости интерполяционного процесса к целому оператору.

Данная статья продолжает исследования авторов в [1–3] по изучению сходимости полиномиальных операторных процессов. В [1, 2] доказаны теоремы о сходимости интерполянтов к полиномиальному оператору, в [3] — к целому. Отметим, что в последнем случае рассматривался интерполяционный операторный полином типа Ньютона и для построения операторных разделенных разностей требовалось существование соответствующих интегралов Бохнера. В данной работе для целого оператора в гильбертовом пространстве предлагается интерполяционный процесс достаточно простой структуры и при выполнении определенных условий доказывается теорема о поточечной сходимости этого процесса к целому оператору.

Пусть X — гильбертово, Y — линейное нормированное пространства. Дадим следующее

Определение. Оператор F: $X \to Y$ назовем целым, если он представим в виде

$$F(x) = L_0 + L_1 x + L_2 x^2 + \cdots + L_n x^n + \cdots, \tag{1}$$

а ряд

$$\|L_0\| + \|L_1\| \cdot \|x\| + \cdots + \|L_n\| \cdot \|x^n\| + \cdots \tag{2}$$

сходится при всех $x \in X$. Здесь $L_0 \in Y$, $L_k x^k = L_k(x, x, \ldots, x)$: $X \to Y$ k-я операторная степень, которая получается из k-линейного непрерывного симметричного оператора $L_k(v_1, v_2, \ldots, v_k)$: $X^k \to Y$, когда $v_1 = v_2 = \cdots = v_k = x$, $\|L_k\|$ — норма этого оператора.

Рассмотрим операторный полином n-й степени

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n+1} L_k(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})(x_{i_1}, x) \cdots (x_{i_k}, x), \tag{3}$$

где $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ — ортонормальная система элементов, $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в X. Нетрудно видеть, что полином $P_n(x)$ является интерполяционным для оператора $F(x)$ с интерполяционными условиями

$$\begin{gathered} P_n^{(k)}(0) x_{i_k}, x_{i_{k-1}}, \ldots, x_{i_1} = F^{(k)}(0) x_{i_k}, x_{i_{k-1}}, \ldots, x_{i_1}, \\ 1 \le i_1, i_2, \ldots, i_k \le n, \qquad k = o, n, \end{gathered} \tag{4}$$

где $F^{(k)}(0)x_{i_k}, x_{i_{k-1}}, \ldots, x_{i_1}$ — дифференциал Гато k-го порядка для оператора F в нуле по направлениям $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$. Имеет место следующая

Теорема. *Пусть* $\{x_i\}_1^\infty$ *ортонормальный базис в* X, *множество* $Z \subseteq X$ *такое, что*

$$\varepsilon_n(x) = \left\| x - \sum_{i=1}^{n+1} (x_i, x) x_i \right\| = o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n \to \infty, \qquad x \in Z. \tag{5}$$

Тогда интерполяционный процесс $P_n(x)$ *в* (3) *сходится к целому оператору* $F(x)$ *при всех* $x \in Z$.

Доказательство. Обозначим

$$F_n(x) = L_0 + L_1 x + L_2 x^2 + \cdots + L_n x^n,$$

$R_n(x)$ — остаток ряда в (1). Тогда

$$\|F(x) - P_n(x)\| = \|F_n(x) + R_n(x) - P_n(x)\| \leq \|F_n(x) - P_n(x)\| + \|R_n(x)\|. \tag{6}$$

Поскольку оператор F целый, то $\|R_n(x)\| \to 0$ при $n \to \infty$ для всех $x \in X$. Оценим первое слагаемое в правой части неравенства (6). На основании результата работы [1] имеем

$$\|F_n(x) - P_n(x)\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|L_k\| \left[(\|x\| + \varepsilon_n(x))^k - \|x\|^k \right]. \tag{7}$$

Обозначим $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \|L_k\| \|x\|^k$. Далее, используя преобразование Абеля для конечных сумм, получим $(x \neq 0)$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \|L_k\| \left[(\|x\| + \varepsilon_n(x))^k - \|x\|^k \right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \|L_k\| \|x\|^k \left[\left(1 + \frac{\varepsilon_n(x)}{\|x\|}\right)^k - 1 \right] = \left[\left(1 + \frac{\varepsilon_n(x)}{\|x\|}\right)^n - 1 \right] S_n(x) \\
&- \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \left[\left(1 + \frac{\varepsilon_n(x)}{\|x\|}\right)^{k+1} - 1 \right] - \left[\left(1 + \frac{\varepsilon_n(x)}{\|x\|}\right)^k - 1 \right] \right\} S_k(x) \\
&\leq M(x) \left\{ \frac{\varepsilon_n(x)}{\|x\|} + 2 \left[\left(1 + \frac{\varepsilon_n(x)}{\|x\|}\right)^n - 1 \right] \right\},
\end{aligned} \tag{8}$$

где $M(x)$ оценка сверху для k-х частичных сумм сходящегося ч ислового ряда $S_\infty(x)$. Поскольку $\varepsilon_n(x) = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \to \infty$, $x \in Z$, то

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\varepsilon_n(x)}{\|x\|} = 0 \tag{9}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{\varepsilon_n(x)}{\|x\|}\right)^n = \exp\left\{ \lim_{n \to \infty} \frac{n \varepsilon_n(x)}{\|x\|} \right\} = 1, \tag{10}$$

и с учетом (7)-(10) получаем

$$\|F_n(x) - P_n(x)\| \to 0, \qquad n \to \infty, \qquad x \in Z.$$

Теорема полностью доказана. □

Пример. Пусть $X = L_2(-\pi,\pi)$,

$$\{x_i\}_1^\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2t, \dots,$$

$F\colon X \to X$ целый оператор вида

$$\begin{aligned} F(x) = K_0(t) &+ \int_{-\pi}^{\pi} K_1(t,z_1)x(z_1)\,dz_1 \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_2(t,z_1,z_2)x(z_1)x(z_2)\,dz_1\,dz_2 + \cdots \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t,z_1,\dots,z_n)x(z_1)\cdots x(z_n)\,dz_1\cdots dz_n + \cdots, \end{aligned}$$

где K_i симметричные, интегрируемые с квадратом функции,

$$\|L_k\|^2 \le \int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi} K_n^2(t,z_1,\dots,z_n)\,dz_1\cdots dz_n\,dt, \qquad \|x\|^2 = (x,x),$$

$(\cdot,\cdot)$ скалярное произведение в X. Тогда полиномиальный оператор $P_n(x)$, удовлетворяющий интерполяционным условиям (4), имеет вид

$$\begin{aligned} P_n(x) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{i_1,\dots,i_p=1}^{n+1} \int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi} & K_p(t,z_1,\dots,z_p)x_{i_1}(z_1)\cdots x_{i_p}(z_p) \\ & \times dz_1\cdots dz_p(x,x_{i_1})\cdots(x,x_{i_p}) \end{aligned}$$

и в условиях теоремы

$$\|F(x) - P_n(x)\| \to 0, \qquad n\to\infty, \qquad x \in Z.$$

При этом в качестве множества Z, для элементов которого справедливо соотношение (5), может быть выбрано множество $\tilde{C}^{(k)}[-\pi,\pi]$ периодических с периодом 2π функций, имеющих k-ю ($k \ge 2$) производную с ограниченным изменением в промежутке $[-\pi,\pi]$.

Литература

1. В. В. Хлобыстов, Е. Ф. Кашпур, *К задаче интерполирования полиномиальных операторов*, Кибернетика и системный анализ (1996), № 3, 102–108.
2. В. Л. Макаров, В. В. Хлобыстов, *Полиномиальное интерполирование операторов*, Обчислювальна та прикладна математика (1995), № 79, 10–116.
3. В. Л. Макаров, В. В. Хлобыстов, *Полиномиальное интерполирование операторов*, Обчислювальна та прикладна математика (1994), № 78, 55–133.

КИЕВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. ТАРАСА ШЕВЧЕНКО, ФАКУЛЬТЕТ КИБЕРНЕТИКИ, КИЕВ, 252601, УЛ. ВЛАДИМИРСКАЯ 64

Поступила 06.10.96

Обчислювальна та прикладна математика
Вип. 82, 1997, стор. 112–123

Computational and Applied Mathematic
No. 82, 1997, pp. 112–12

АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

УДК 519.642.7:532.5.013.2

Д. И. ЧЕРНИЙ

РЕЗЮМЕ. В работе обосновывается построение согласованного разбиения границы области течения, определяющего погрешность представления решения на каждом временном слое и определяются кинематические ограничения как на характер разбиения так и на время существования единственного решения.

При рассмотрении гидродинамических задач зачастую используется аппарат теории аналитических функций [1–8], однако его применение ограничивается, как правило, стационарными задачами. Решение нестационарных задач связано с большими трудностями [6, 7, 8], преодолеть которые можно только с применением численных методов. Используя подходящие аппроксимации [9, 10, 11, 12, 13, 14], удается построить приближенное решение, однако, в связи с существенной деформацией границ, необходимо учесть точность представления решения на каждом шаге по времени и время существования единственного решения.

1. О модели области с подвижной границей.

С точки зрения Лагранжа закон движения сплошной среды определяется траекторией каждой индивидуальной частицы, совокупность которых составляет некоторый объем. Предполагается, что для любой частицы из D^+, индивидуализированной своим начальным положением $z(t_0) = z_0$, можно положить закон движения в виде аналитической функции от времени t. Тогда область $\bar{D}^+$ представляет собой некоторый деформируемый объем, заполненный жидкостью, причем каждая точка $z \in \bar{D}^+$ может рассматриваться как частица жидкости, перемещающаяся с комплексной скоростью $V = u + iv$. Комплексная скорость жидких частиц, составляющих границу $L = \partial D$ будет определяться в предельных точках D^+ и обозначаться $W(\omega, t) = \frac{d\omega}{dt}$, где $\omega \in L$.

Если комплексный потенциал течения $\Phi(z,t) = \varphi + i\psi$ представлен в виде

$$\Phi(z,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L f(\omega(t),t)\ln(z-\omega(t))\,d\omega(t), \tag{1.1}$$

то для производной по времени t справедливо:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(z,t) = &-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{W(\omega(t),t)f(\omega(t),t)}{z-\omega(t)}\,d\omega(t)\\ &+\frac{1}{2\pi i}\int_L \ln(z-\omega(t))\frac{d}{dt}\big(f(\omega(t),t)\,d\omega(t)\big)\\ &+\frac{1}{2\pi i}W_0(\omega_0,t)\ln(z-\omega_0)f(\omega_0,t),\end{aligned}\tag{1.2}$$

где $W_0 = W(\omega_0,t)$ — скорость пополнения подвижной границы новыми жидкими частицами в точке границы ω_0.

Для определения функции давления в любой точке z из D^+ представление интеграла Коши–Лагранжа может иметь вид:

$$\frac{P(z,t)}{\rho} = -\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial\Phi(z,t)}{\partial t}+\frac{V(z,t)\bar{V}(z,t)}{2}-G(z)\right\},\tag{1.3}$$

где для комплексно-сопряженной и комплексной скорости в точке $z \in D^+$ справедливо представление:

$$\bar{V}(z,t) = \frac{\partial\Phi(z,t)}{\partial z}\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\omega(t),t)\,d\omega(t)}{z-\omega(t)},\tag{1.4}$$

$$V(z,t) = \overline{\bar{V}(z,t)}.\tag{1.5}$$

В силу того, что в D^+ определены поле комплексной (соответственно комплексно-сопряженной) скорости и комплексный потенциал течения, при деформации области $\bar{D}^+$ может быть поставлена задача Коши:

$$\frac{dz}{dt} = V(z,t), \qquad \left(\frac{d\bar{z}}{dt} = \bar{V}(z,t)\right),\tag{1.6}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{V(z,t)\bar{V}(z,t)}{2} - G(z) + \frac{P(z,t)}{\rho},\tag{1.7}$$

$$z(t_0) = z_0, \qquad (\bar{z}(t_0) = \bar{z}_0),\tag{1.8}$$

$$\Phi(z,t_0) = \Phi_0(z),\tag{1.9}$$

имеющая место до момента времени $t = t_0+T$, когда любая маркированная частица $z(t)$ совпадет с какой-либо другой частицей из $\bar{D}^+$ (т.е. до нарушения условия единственности решения). $G(z)$ — заданый потенциал массовых сил.

Для точек $z \to \omega$ в области $\bar{D}^+$

$$\begin{aligned}&G(z) = G(\omega), \qquad P(z,t) = P(\omega,t),\\ &\Phi(z,t) = \Phi(\omega,t), \quad \bar{V}(z,t) = \bar{V}^+(\omega,t),\end{aligned}\tag{1.10}$$

где сингулярные интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши. В силу аналитичности функций $z(t)$, $\bar{V}(z,t)$ для оператора индивидуальной производной справедливо:

$$\frac{d^k}{dt^k}z(t) = \frac{D^{k-1}}{Dt^{k-1}}V(z,t), \qquad k \geq 1,\tag{1.11}$$

где

$$\frac{D}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{V}(z,t)\frac{\partial}{\partial z}+V(\bar{z},t)\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right).\tag{1.12}$$

Для траектории частицы в окрестности ее начального положения справедливо разложение в ряд Тейлора:

$$z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k. \tag{1.13}$$

Для определения значения потенциала Φ в перемещающейся частице $z(t)$ аналогично предыдущему справедливо:

$$\Phi(z(t),t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Phi^{(k)}}{k!}(t-t_0)^k, \tag{1.14}$$

где

$$z^{(k)} = \frac{d^k z}{dt^k}, \qquad \Phi^{(k)} = \frac{d^k}{dt^k}\Phi(z(t),t), \tag{1.15}$$

$t \in [t_0, t_o + T)$, где T — радиус сходимости рядов (1.14) и (1.15).

Разложение комплексно-сопряженное (1.13) в соответствии с (1.6), (1.11) и (1.12) может быть представлено в виде:

$$\bar{z}(t) = \bar{z}(t_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{Dt^k}\bar{V}(z,t_0)\frac{(t-t_0)^{k+1}}{(k+1)!}. \tag{1.16}$$

Оставив в разложениях (1.13), (1.14) (или в (1.16)) нужное число слагаемых, можно с требуемой точностью определить траекторию, кинематические и динамические характеристики элементарной жидкой частицы из $\bar{D}^+$ при изменении ее положения в момент времени $t_0 + \Delta t$.

2. Об аппроксимации решения для заданных разбиений границы области.

Будем считать, что граница $L = \partial D^+$ связной области D^+ в комплексной плоскости является кусочно-гладкой кривой, определяемой аналитическим представлением $\omega(l) = \xi(l) + i\eta(l)$, где l — параметр длины дуги, отсчитываемый от некоторой точки на L, причем в каждой окрестности точки гладкости l' кривой L определена ее кривизна

$$\varkappa = \varkappa(\omega(l')) \in C^1,$$

так, что для $e^{i\alpha(l)} = \frac{d\omega}{dl}$ справедливо:

$$e^{i\alpha(l)} = e^{i\alpha(l')}(1 + (l-l')i\varkappa(l') + (l-l')^2\left(\frac{i}{2}\frac{d\varkappa}{dl}(l') - \varkappa^2(l')) + \cdots\right). \tag{2.1}$$

Положим, что совокупность действительных чисел $\{l_k, k = 0,\dots,m\}$ определяет узлы разбиения по длине кривой L:

$$\{\omega\}_m = \{\omega_k = \omega(l_k), k = 0,\dots,m\}, \tag{2.2}$$

а L^k —дуга между точками ω_{k-1}, ω_k,

$$L = \bigcup_{k=1}^{m} L^k. \tag{2.3}$$

В случае, когда L — замкнутая, $\omega(l_0) = \omega(l_m)$ при $l_0 \neq l_m$.

Норму разбиения $\{\omega\}_m$ кривой L определяем соотношением:

$$\sigma_m = \max_k\{|L^k| = l_k - l_{k-1}\}, \qquad k = 1,\dots,m. \tag{2.4}$$

Разбиение $\{\omega\}_m$ будет соответствовать и m-звенной ломаной L', полученной соединением отрезками точек ω_k, $k = 0,\ldots,m$. Норму разбиения конечно-звенной ломаной L' определяем соотношением

$$\sigma'_m = \max_k\{|L'^k| = |\omega_k - \omega_{k-1}|\}, \qquad k = 1,\ldots,m. \tag{2.4'}$$

Число разбиения m и узлы разбиения $\{\omega\}_m$ выбираются такими, чтобы на $\forall L^k$ выполнялись условия

$$\forall\omega',\omega'' \quad |\omega' - \omega''| \le |\omega_k - \omega_{k-1}|, \quad k = 1,\ldots,m, \tag{2.5}$$

либо

$$|\omega_k - \omega_{k-1}| \ll \frac{1}{\varkappa_k}, \quad \varkappa_k = \max_{l\in L^k}|\varkappa(l)|, \tag{2.6}$$

если $\varkappa(l') \ne 0,\infty$.

Введем еще одно множество действительных чисел

$$\{l_{0k}, k = 1,\ldots,m\}, \qquad l_{0k} \in [l_{k-1}, l_k], \tag{2.7}$$

так, что можно определить множество узлов

$$\{\omega_0\}_m = \{\omega_{0k} = \omega(l_{0k}), k = 1,\ldots,m\}, \tag{2.8}$$

каждый из которых находится на соответствующем элементе L_j кривой L. Выбранные таким образом множества $\{\omega\}_m$ и $\{\omega_0\}_m$ будем называть согласованным разбиением L. В каждом узле ω_{0k} определим круг Ω_k радиуса δ_k, где

$$\delta_k = \max_{\omega\in L^k}|\omega - \omega_{0k}|, \qquad k = 1,\ldots,m. \tag{2.9}$$

Тогда объединение всех кругов образует конечное покрытие кривой L:

$$\Omega^m = \bigcup_{k=1}^{m}\Omega_k. \tag{2.10}$$

Если множество узлов $\{\omega_0\}_m$ выбраны из условия

$$|\omega_{k-1} - \omega_{0k}| = |\omega_k - \omega_{0k}|, \qquad k = 1,\ldots,m, \tag{2.11}$$

то множества $\{\omega\}_m$ и $\{\omega_0\}_m$ будут называться каноническим разбиением кривой L.

Объединение кругов с центрами в точках ω_{0k} и радиусами

$$\delta_{0k} = |\omega_{k-1} - \omega_{0k}| = |\omega_k - \omega_{0k}|, \qquad k = 1,\ldots,m, \tag{2.12}$$

также образуют конечное покрытие кривой L:

$$\Omega_0^m = \bigcup_{k=1}^{m}\Omega_{0k}. \tag{2.13}$$

Если $|l_k - l_{k-1}| = \sigma_m$, $k = 1,\ldots,m$, то разбиение $\{\omega\}_m$ будет называться равномерным. При сгущении разбиения $\{\omega\}_m$, построенного с учетом условий (2.5), (2.6), получаем, что $\delta_k \to 0$, $k = 1,\ldots,n$, $n \to \infty$, а конечное покрытие $\Omega'' \to L$, т.е. все точнее покрывает границу $\partial D^+ \equiv L$ (граница покрытия Ω'' все плотнее охватывает кривую L), причем $\sigma_m \le \sigma_n$, $m \le n$, при $n \to \infty$.

Рассмотрим точку $z \in D^+$, тогда

$$\Delta = \min_{\omega\in L}|z - \omega| \tag{2.14}$$

определяет минимальное расстояние до кривой L. Зададим на L разбиение $\{\omega\}_m$ удовлетворяющее условию:

$$\sigma_m < \min\left(\Delta, \min_L\left|\frac{1}{\varkappa}\right|\right), \tag{2.15}$$

тогда справедливо

$$\lambda = \frac{\sigma_m}{\Delta} < 1. \tag{2.16}$$

Рассмотрим в комплексной плоскости некоторое, соответствующее разбиению $\{\omega\}_m$, множество точек $\{z_0\}_m$, где для каждой z_{0k} можно определить круг Ω'_k с радиусом

$$\delta'_k = \max_{\omega \in L^k} |\omega - z_{0k}|, \qquad k = 1, \dots, m. \tag{2.17}$$

Объединение всех таких кругов образует некоторое конечное покрытие кривой L:

$$\Omega'^m = \bigcup_{k=1}^{m} \Omega'_k. \tag{2.18}$$

Если точка z_{0k} находится точно посередине отрезка между точками ω_{k-1}, ω_k, $k = 1, \dots, m$, т.е. выполняется условие для круга Ω'_{0k}:

$$\delta'_{0k} = |\omega_{k-1} - z_{0k}| = |\omega_k - z_{0k}| = \frac{1}{2}|\omega_k - \omega_{k-1}|, \tag{2.19}$$

то конечное покрытие из таких кругов будет обозначаться:

$$\Omega_0'^m = \bigcup_{k=1}^{m} \Omega'_{0k}. \tag{2.20}$$

Очевидно, что мера $\mu(\Omega_0'^m)$ произвольного конечного покрытия кривой L будет минимальной при выполнении условия (2.19) и для фиксированного разбиения $\{\omega\}_m$ справедливо:

$$\mu(\Omega_0'^m) \le \pi \sum_{k=1}^{m} \delta_{0k}'^2 \le \mu(\Omega'^m) \le \pi \sum_{k=1}^{m} \delta_k'^2. \tag{2.21}$$

Пусть граница области $\partial D^+ \equiv L$ является кусочно-гладкой кривой и в D^+ заданы аналитические функции (посредством задания $f(\omega)$ на L), причем в силу (2.3) справедливо представление:

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L f(\omega)\ln(z-\omega)\,d\omega = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i}\int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega)\ln(z-\omega)\,d\omega \tag{2.22}$$

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\omega)}{z-\omega}\,d\omega = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i}\int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} \frac{f(\omega)}{z-\omega}\,d\omega \tag{2.23}$$

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\omega)}{(z-\omega)^n}\,d\omega = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i}\int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} \frac{f(\omega)}{(z-\omega)^n}\,d\omega \tag{2.24}$$

В силу выбора множества $\{z_0\}_m$, отвечающего разбиению $\{\omega\}_m$, для (2.22), (2.23), (2.24) справедливо

$$\Phi_0(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega)\left\{\ln(z - z_{0k}) + \ln\left(1 - \frac{\omega - z_{0k}}{z - z_{0k}}\right)\right\} d\omega \tag{2.25}$$

$$\Phi_1(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} \frac{f(\omega)}{z - z_{0k}} \left(1 - \frac{\omega - z_{0k}}{z - z_{0k}}\right)^{-1} d\omega \tag{2.26}$$

$$\Phi_n(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} \frac{f(\omega)}{(z - z_{0k})^n} \left(1 - \frac{\omega - z_{0k}}{z - z_{0k}}\right)^{-n} d\omega \tag{2.27}$$

Обозначим $\Delta_k = |z - z_{0k}|$, тогда, если

$$\lambda'_k = \frac{\delta'_k}{\Delta_k} < 1, \qquad k = 1, \ldots, m, \tag{2.28}$$

где δ'_k определено из условия (2.17), то для (2.25), (2.26), (2.27) справедливо асимптотическое представление

$$\Phi_0(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \ln(z - z_{0k}) \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega)\, d\omega - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{\omega - z_{0k}}{z - z_{0k}}\right)^j d\omega \tag{2.29}$$

$$\Phi_1(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i(z - z_{0k})} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega)\, d\omega + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i(z - z_{0k})} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega) \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\omega - z_{0k}}{z - z_{0k}}\right)^j d\omega \tag{2.30}$$

$$\Phi_n(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i(z - z_{0k})^n} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega)\, d\omega + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i(z - z_{0k})^n} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(n+j-1)!}{(n-1)!\,j!} \left(\frac{\omega - z_{0k}}{z - z_{0k}}\right)^j d\omega \tag{2.31}$$

Замечание 1. Условие (2.28) означает, что для $\forall k$ точка z лежит вне кругов Ω'_k (с центрами в точках z_{0k}), замыкание которых целиком содержит соответствующие граничные элементы L^k. Условие (2.28) является необходимым для существования и сходимости рядов в асимптотических представлениях (2.29), (2.30), (2.31).

Лемма 1. *Если $f(\omega)$ интегрируема на L^k, $k = 1, \ldots, m$, а z и z_{0k} удовлетворяют* (2.28), *то для z вне ${\Omega'}^m$ справедливо*:

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z - \omega)\, d\omega - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \ln(z - z_{0k}) \int_{L^k} f(\omega)\, d\omega\right| < O(\Gamma\lambda), \tag{2.32}$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{z - \omega}\, d\omega - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i(z - z_{0k})} \int_{L^k} f(\omega)\, d\omega\right| < O\left(\frac{\Gamma\lambda}{\Delta_0}\right), \tag{2.33}$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{(z - \omega)^n}\, d\omega - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i(z - z_{0k})^n} \int_{L^k} f(\omega)\, d\omega\right| < O\left(\frac{\Gamma\lambda}{\Delta_0^n}\right), \tag{2.34}$$

где

$$\Delta_0 = \min_k |z - z_{0k}|, \tag{2.35}$$

$$\lambda = \max_k \lambda'_k < 1, \qquad k = 1, \dots, m. \tag{2.36}$$

$$\Gamma = \left|\sum_{k=1}^{m} \int_{L^k} f(\omega)\,d\omega\right| = \left|\int_L f(\omega)\,d\omega\right|. \tag{2.37}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi i j}\int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega)\left(\frac{\omega - z_{0k}}{z - z_{0k}}\right)^j d\omega\right| \le \sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{m}\frac{(\lambda'_k)^j}{2\pi i j}\int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega)\,d\omega\right| \\
&\qquad < \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^j}{2\pi j}\left|\sum_{k=1}^{m}\int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega)\,d\omega\right| = \frac{\Gamma}{2\pi}|\ln(1-\lambda)| \sim O(\Gamma\lambda),
\end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi i j(z - z_{0k})}\int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega)\left(\frac{\omega - z_{0k}}{z - z_{0k}}\right)^j d\omega\right| \\
&\qquad \le \sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{m}\frac{(\lambda'_k)^j}{2\pi i j(z - z_{0k})}\int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega)\,d\omega\right| < \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^j}{2\pi\Delta_0}\left|\sum_{k=1}^{m}\int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega)\,d\omega\right| \\
&\qquad = \frac{\Gamma}{2\pi\Delta_0}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda^j = \frac{\Gamma}{2\pi\Delta_0}\left((1-\lambda)^{-1} - 1\right) \sim O\left(\frac{\Gamma\lambda}{\Delta_0}\right),
\end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi i j(z - z_{0k})^n}\int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega)\frac{(n+j-1)!}{(n-1)!\,j!}\left(\frac{\omega - z_{0k}}{z - z_{0k}}\right)^j d\omega\right| \\
&\qquad \le \sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{m}\frac{(\lambda'_k)^j}{2\pi i j(z - z_{0k})^n}\cdot\frac{(n+j-1)!}{(n-1)!\,j!}\int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega)\,d\omega\right| \\
&\qquad = \frac{\Gamma}{2\pi\Delta_0^n}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^j(n+j-1)!}{(n-1)!\,j!} = \frac{\Gamma}{2\pi\Delta_0^n}\left((1-\lambda)^{-n} - 1\right) \sim O\left(\frac{\Gamma\lambda}{\Delta_0^n}\right).
\end{aligned} \tag{2.40}$$

□

Лемма 2. *Если* $f(\omega)$ — *кусочно непрерывная, ограниченная функция, а* z *и* z_{0k} *удовлетворяют* (2.28), *то для* z *вне* Ω'^m *справедливо*:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_L f(\omega)\ln(z-\omega)\,d\omega - \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\ln(z - z_{0k})\int_{L^k} f(\omega)\,d\omega\right| < O(\hat{f}_0 m\lambda\delta), \tag{2.41}$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\omega)}{z-\omega}\,d\omega - \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi i(z - z_{0k})}\int_{L^k} f(\omega)\,d\omega\right| < O(\hat{f}_0 m\lambda^2), \tag{2.42}$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\omega)}{(z-\omega)^n}\,d\omega - \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi i(z - z_{0k})^n}\int_{L^k} f(\omega)\,d\omega\right| < O\left(\frac{\hat{f}_0 m\lambda^2}{\Delta_0^{n-1}}\right). \tag{2.43}$$

Доказательство. Пусть

$$\hat{f}_k = \max_{\omega \in L^k} |f(\omega)|, \qquad k = 1, \dots, m, \tag{2.44}$$

$$\hat{f}_0 = \max_k \hat{f}_k, \tag{2.45}$$

$$\delta_k = \max_{\omega \in L^k} |\omega - z_{0k}|, \tag{2.46}$$

$$\delta = \max_k \delta_k, \qquad \Delta_0 = \min_k \Delta_k. \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega)\left(\frac{\omega - z_{0k}}{z - z_{0k}}\right)^j d\omega\right| \\
&\quad \le \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{\hat{f}_k}{2\pi j(j+1)}\left|\frac{(\omega_k - z_{0k})^{j+1} - (\omega_{k-1} - z_{0k})^{j+1}}{(z - z_{0k})^j}\right| \\
&\quad \le \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{\hat{f}_0}{2\pi j(j+1)}\left|\frac{2(\delta_k)^{j+1}}{(z - z_{0k})^j}\right| \le \sum_{j=1}^{\infty}\frac{m\hat{f}_0\delta}{\pi j(j+1)}\lambda \le m\frac{\hat{f}_0\delta}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j(j+1)} \\
&\quad < m\frac{\hat{f}_0\delta}{\pi}|\ln(1-\lambda)| \sim O(\hat{f}_0 m\lambda\delta),
\end{aligned} \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi j(z - z_{0k})}\int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega)\left(\frac{\omega - z_{0k}}{z - z_{0k}}\right)^j d\omega\right| \\
&\quad \le \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{\hat{f}_k}{2\pi(j+1)}\left|\frac{(\omega_k - z_{0k})^{j+1} - (\omega_{k-1} - z_{0k})^{j+1}}{(z - z_{0k})^{j+1}}\right| \le \sum_{j=1}^{\infty}\frac{m\hat{f}_0\lambda^{j+1}}{\pi(j+1)} \\
&\quad < \frac{m\hat{f}_0}{\pi}\lambda\big((1-\lambda)^{-1} - 1\big) \sim O(\hat{f}_0 m\lambda^2),
\end{aligned} \tag{2.49}$$

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi i(z - z_{0k})^n}\int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega)\frac{(n+j-1)!}{(n-1)!\,j!}\left(\frac{\omega - z_{0k}}{z - z_{0k}}\right)^j d\omega\right| \\
&\quad \le \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{(n+j-1)!\,\hat{f}_k}{2\pi(n-1)!\,j!}\left|\frac{(\omega_k - z_{0k})^{j+1} - (\omega_{k-1} - z_{0k})^{j+1}}{(z - z_{0k})^{n+j}(j+1)}\right| \\
&\quad < \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(n+j-1)!\,\hat{f}_k\lambda^{j+1}}{(n-1)!\,(j+1)!\,\pi\Delta_0^{n-1}} < \frac{m\hat{f}_0}{\pi}\cdot\frac{\lambda}{\Delta_0^{n-1}}\big((1-\lambda)^{-n} - 1\big) \sim O\left(\frac{\hat{f}_0 m\lambda^2}{\Delta_0^{n-1}}\right).
\end{aligned} \tag{2.50}$$

□

Замечание 2. Следует отметить, что погрешность представлений (2.41)–(2.43) и (2.48)–(2.50) может быть уменьшена, если минимизировать радиусы δ_k окружностей с центром в точках z_{0k}, $k = 1, \dots, m$. Очевидно, что минимальный радиус у соответствующих окружностей будет, если выбрать центры z_{0k} точно посередине между соответствующими узлами ω_{k-1} и ω_k разбиения $\{\omega\}_m$.

Лемма 3. *Если $f(\omega)$ кусочно-непрерывная, ограниченная функция, а $z_{0k} = (\omega_{k-1} + \omega_k)/2$, $k = 1, \dots, m$, где $\{\omega\}_m$ — разбиение гладкой кривой L, удовлетворяющее* *условию* (2.15), *а* z *и* z_{0k} *удовлетворяют* (2.28), *тогда для* $z \notin \Omega'^m$ *справедливо:*

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_L f(\omega)\ln(z-\omega)\,d\omega - \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\ln(z-z_{0k})\int_{L^k} f(\omega)\,d\omega\right| < O(\hat f_0 m\delta\lambda^2), \tag{2.51}$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\omega)}{z-\omega}\,d\omega - \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi i(z-z_{0k})}\int_{L^k} f(\omega)\,d\omega\right| < O(\hat f_0 m\lambda^3), \tag{2.52}$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\omega)}{(z-\omega)^n}\,d\omega - \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi i(z-z_{0k})^n}\int_{L^k} f(\omega)\,d\omega\right| < O\left(\frac{\hat f_0 m\lambda^3}{\Delta_0^{n-1}}\right). \tag{2.53}$$

Доказательство. Пусть

$$\hat f_k = \max_{\omega\in L^k}|f(\omega)|, \qquad k=1,\dots,m, \tag{2.54}$$

$$\hat f_0 = \max_k \hat f_k, \tag{2.55}$$

$$h_k = \frac{1}{2}(\omega_k-\omega_{k-1}), \qquad z_{0k} = \omega_k - h_k = \omega_{k-1}+h_k, \tag{2.56}$$

$$\delta_k = |h_k|, \qquad k=1,\dots,m, \qquad \delta = \max_k \delta_k \le \sigma_m, \tag{2.57}$$

$$\Delta_0 = \min_k |z-z_{0k}|. \tag{2.58}$$

Таким образом, $\omega_{k-1} = z_{0k}-h_k$, $\omega_k = z_{0k}+h_k$, $k=1,\dots,m$.

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi i j}\int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega)\left(\frac{\omega-z_{0k}}{z-z_{0k}}\right)^j d\omega\right| \le \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\hat f_0}{2\pi j(j+1)}\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{h_k^{j+1}-(-h_k)^{j+1}}{(z-z_{0k})^j}\right| \\
&\quad \le \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\hat f_0}{2\pi j(j+1)}\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{(h_k)^{j+1}-(-h_k)^{j+1}}{\Delta_k^j}\right| \le \frac{\hat f_0 m\delta}{3\pi}\lambda^2 + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{m\hat f_0\delta\lambda^{(2j+1)}}{\pi j(2j+1)(j+1)} \\
&\quad \sim O(\hat f_0 m\delta\lambda^2),
\end{aligned} \tag{2.59}$$

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi i(z-z_{0k})}\int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega)\left(\frac{\omega-z_{0k}}{z-z_{0k}}\right)^j d\omega\right| \le \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{\hat f_k}{2\pi(j+1)}\left|\frac{h_k^{j+1}-(-h_k)^{j+1}}{\Delta_k^{j+1}}\right| \\
&\quad \le \frac{\hat f_0 m\lambda^3}{3\pi} + \sum_{j=2}^{\infty}\frac{\hat f_0 m}{2\pi(2j+1)}\lambda^{2j+1} \sim O(\hat f_0 m\lambda^3),
\end{aligned} \tag{2.60}$$

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi i(z-z_{0k})^n}\int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega)\frac{(n+j-1)!}{(n-1)!\,j!}\left(\frac{\omega-z_{0k}}{z-z_{0k}}\right)^j d\omega\right| \\
&\quad \le \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{\hat f_k(n+j-1)!}{2\pi(n-1)!\,(j+1)!}\left|\frac{h_k^{j+1}-(-h_k)^{j+1}}{\Delta_k^{j+1}}\right| \le \sum_{j=2}^{\infty}\frac{m\hat f_0(n+2j)!}{\pi(n-1)!\,(2j+1)!}\cdot\frac{\lambda^{2j+1}}{\Delta_0^{n-1}} \\
&\quad = \frac{m\hat f_0(n+4)!}{\pi(n-1)!\,3!}\cdot\frac{\lambda^3}{\Delta_0^{n-1}} + \sum_{j=2}^{\infty}\frac{m\hat f_0(n+2j)!}{\pi(n-1)!\,(2j+1)!}\cdot\frac{\lambda^{2j+1}}{\Delta_0^{n-1}} \sim O\left(\frac{\hat f_0 m\lambda^3}{\Delta_0^{n-1}}\right).
\end{aligned} \tag{2.61}$$

□

Замечание 3. Следует отметить, что оценки (2.41)–(2.43) и (2.48)–(2.50) остаются справедливыми при $z_{0k}\in L_k$, $k=1,\dots,m$, т.е. при использовании согласованного разбиения $\{\omega\}_m$ $\{\omega_0\}_m$.

В силу изложенного справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Если аналитическая функция имеет представления вида* (2.22)–(2.24), *где плотность f интегрируема на каждом элементе границы L^k, $k = 1, \ldots, m$, то для $\forall m$, $\forall\{\omega\}_m$, $\exists\{z_0\}_m$, что $\forall z \in \bar{D}^+ \setminus \Omega^m$ справедливы оценки:*

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z-\omega)\, d\omega - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \ln(z - z_{0k}) \int_{L^k} f(\omega)\, d\omega \right\|_C \le A_0 \Gamma \lambda, \tag{2.62}$$

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{z-\omega}\, d\omega - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i (z - z_{0k})} \int_{L^k} f(\omega)\, d\omega \right\|_C \le A_1 \Gamma \frac{\lambda}{\Delta_0}, \tag{2.63}$$

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{(z-\omega)^n}\, d\omega - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i (z - z_{0k})^n} \int_{L^k} f(\omega)\, d\omega \right\|_C \le A_n \Gamma \frac{\lambda}{\Delta_0^n}, \tag{2.64}$$

где

$$\Delta_0 = \min_k |z - z_{0k}|, \qquad \Delta_k = |z - z_{0k}|, \tag{2.65}$$

$$\Gamma = \left| \int_L f(\omega)\, d\omega \right|, \tag{2.66}$$

$$\lambda = \max_k \lambda_k' < 1, \tag{2.67}$$

$$\lambda_k' = \frac{\delta_k'}{\Delta_k} < 1, \tag{2.68}$$

$$\Omega_k = \left\{ z\colon |z - z_{0k}| \le \delta_k' = \max_{\omega \in L^k} |\omega - z_{0k}| \right\}, \tag{2.69}$$

$$\Omega^m = \bigcup_{k=1}^{m} \Omega_k, \tag{2.70}$$

A_j — *некоторая константа*, $j = 0, 1, \ldots$.

Теорема 2. *Если аналитическая функция имеет представления вида* (2.22)–(2.24), *где плотность f кусочно-непрерывная, ограниченная на L, то для $\forall m$, $\forall\{\omega\}_m$, $\exists\{z_0\}_m$, что $\forall z \in \bar{D}^+ \setminus \Omega^m$ справедливы оценки:*

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z-\omega)\, d\omega - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \ln(z - z_{0k}) \int_{L^k} f(\omega)\, d\omega \right\|_C \le A_0 \hat{f}_0 m \sigma_m \lambda^2, \tag{2.71}$$

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{z-\omega}\, d\omega - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i (z - z_{0k})} \int_{L^k} f(\omega)\, d\omega \right\|_C \le A_1 \hat{f}_0 m \lambda^3, \tag{2.72}$$

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{(z-\omega)^n}\, d\omega - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i (z - z_{0k})^n} \int_{L^k} f(\omega)\, d\omega \right\|_C \le A_n \hat{f}_0 \frac{m\lambda^3}{\Delta_0^{n-1}}, \tag{2.73}$$

где

$$\Delta_0 = \min_k |z - z_{0k}|, \tag{2.74}$$

$$\Delta_k = |z - z_{0k}|, \tag{2.75}$$

$$\lambda = \max_k \lambda_k' < 1, \tag{2.76}$$

$$\lambda_k' = \frac{\delta_k'}{\Delta_k} < 1, \tag{2.77}$$

$$\Omega_k = \left\{ z\colon |z - z_{0k}| \le \delta_k' = \max_{\omega \in L^k} |\omega - z_{0k}| \right\}, \tag{2.78}$$

$$\Omega^m = \bigcup_{k=1}^{m} \Omega_k, \tag{2.79}$$

$$\hat{f}_0 = \max_{\omega \in L} |f(\omega)|, \tag{2.80}$$

A_j — некоторая константа, $j = 0, 1, \ldots$.

Теорема 3. *Если аналитическая функция имеет в D^+ одно из представлений вида* (2.22)–(2.24), *где плотность f — кусочно-непрерывная, ограниченная функция на гладкой L, то $\exists m$ и $\exists\{\omega\}_m$ и $\exists\{\omega_0\}_m$ (согласованное разбиение кривой L), что $\forall z \in \bar{D}^+$ справедливы оценки* (2.71)–(2.73).

Замечание 4. Если согласованное разбиение таково, что каждый граничный элемент L_k является гладкой дугой, так что выполняется условие

$$\sigma_m \ll \min\left(\Delta, \min\left|\frac{1}{\varkappa}\right|\right), \tag{2.81}$$

то оценки (2.71)–(2.73) справедливы именно для канонического разбиения, а конечное покрытие Ω_0^m кривой L будет состоять из цепочки кругов Ω_{0k}, $k = 1, \ldots, m$, причем мера $\mu(\Omega_0^m) \to 0$ при сгущении канонического разбиения (при $m \to \infty$).

3. Учет кинематических эффектов

В силу того, что минимальные по модулю значения скорости имеют место в граничных точках области D^+, рассматривается относительное (касательное к границе) движение жидких частиц, примыкающих к границе $L = \partial D^+$.

Пусть для двух произвольных близких частиц с дуговыми параметрами l_1 и l_2, $dl = l_2 - l_1$, определены законы их перемещения вдоль L:

$$\begin{aligned} l_1(t+T) &= l_1(t) + T_0 W_1(t) + O(T_0^2), \\ l_2(t+T) &= l_2(t) + T_0 W_2(t) + O(T_0^2), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где W_1 и W_2 — соответствующие касательные к L скорости. В случае совпадения положения частиц в момент $t + T$ ($l_1(t+T) = l_2(t+T)$) происходит нарушение единственности решения задачи (1.6)–(1.10). В силу чего справедливо:

$$dl + T(W_2 - W_1) + O(T_0^2) = 0. \tag{3.2}$$

Переходя к пределу при $dl \to 0$, получаем

$$T(l) = -\left(\frac{dW}{dl}\right)^{-1} \tag{3.3}$$

— локальное время, через которое произойдет "коллапс" элемента dl границы L в точке с координатой l. Ввиду того, что всегда $T_0(l) \geq 0$, получаем, что необходимое условие наступления "коллапса":

$$\frac{dW}{dl} < 0, \tag{3.4}$$

где $W(l)$ — касательная к L скорость. Исходя из (3.3), можно ввести локальное "кинематическое" ограничение при разбиении L на граничные элементы L^k:

$$|L^k| \leq \min\left\{\frac{2^{-1}\max_{\omega\in L^k}|W|}{\max_{\omega\in L^k}\frac{dW}{dl}}, \frac{1}{\max_{\omega\in L^k}|\varkappa(\omega)|}\right\}, \qquad k = 1, \ldots, m, \tag{3.5}$$

где $\varkappa(\omega)$ — локальная кривизна L. Локальное время (3.3) в первом приближении ограничивает радиус сходимости рядов (1.13)–(1.16) и ограничивает выбор шага интегрирования по времени t при численном решении задачи (1.6)–(1.10). Исходя из условий (2.81) и (3.5), получаем условие для нормы разбиения $\{\omega\}_m$ границы L:

$$\sigma_m = \max_k \min\left\{\Delta, \min_{l\in L^k}\left|\frac{1}{\varkappa(l)}\right|, \frac{2^{-1}\max_{l\in L^k}|W|}{\max_{l\in L^k}\left|\frac{dW}{dl}\right|}\right\} \tag{3.6}$$

и ограничение на время существования единственного решения:

$$t < T_1 = \min_l T_0(l). \tag{3.7}$$

Литература

1. М. А. Лаврентьев, Б. И. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, "Наука", Москва, 1987.
2. Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения*, "ГИФМЛ", Москва, 1962.
3. Ф. Д. Гахов, *Краевые задачи*, "Наука", Москва, 1977.
4. А. И. Некрасов, *Собрание сочинений*, т. 2, "Изд-во АН СССР", Москва, 1962.
5. Н. Е. Кочин, *Собрание сочинений*, т. 2, "Изд-во АН СССР", Москва, 1962.
6. Г. Биркгоф, Э. Сарантонелло, *Струи, следы и каверны*, "Мир", Москва, 1964.
7. В. Н. Монахов, *Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений*, "Наука", Новосибирск, 1977.
8. Л. Милн–Томсон, *Теоретическая гидродинамика*, "Мир", Москва, 1964.
9. Дж. Л. Уолш, *Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области*, "Изд-во иностр. лит.", Москва, 1961.
10. И. К. Лифанов, *Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент*, ТОО "Янус", Москва, 1995.
11. С. Белоцерковский, В. Н. Котовский, И. Ништ, Р. Федоров, *Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел*, "Наука", Москва, 1988.
12. Т. Громадка II, Ч. Лей, *Комплексный метод граничных элементов в инженерных задачах*, "Мир", Москва, 1990.
13. А. Лаврентьев, *О построении потока, обтекающего дугу заданной формы*, Труды ЦАГИ, "ГААИ", Москва, 1932.
14. Т. Сарпкайя, *Вычислительные методы вихрей. Фримановская лекция (1988)*, Труды Американского общества инженеров-механиков. Современное машиностроение. Серия А, N 10, "Мир", Москва, 1989, стор. 1–60.

КИЕВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. ТАРАСА ШЕВЧЕНКО, ФАКУЛЬТЕТ КИБЕРНЕТИКИ, 252601, КИЕВ, УЛ. ВЛАДИМИРСКАЯ 64

Поступила 13.10.96