

## АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

УДК 519.642.7:532.5.013.2

Д. И. ЧЕРНИЙ

**РЕЗЮМЕ.** В работе обосновывается построение согласованного разбиения границы области течения, определяющего погрешность представления решения на каждом временном слое и определяются кинематические ограничения как на характер разбиения так и на время существования единственного решения.

При рассмотрении гидродинамических задач зачастую используется аппарат теории аналитических функций [1–8], однако его применение ограничивается, как правило, стационарными задачами. Решение нестационарных задач связано с большими трудностями [6, 7, 8], преодолеть которые можно только с применением численных методов. Используя подходящие аппроксимации [9, 10, 11, 12, 13, 14], удастся построить приближенное решение, однако, в связи с существенной деформацией границ, необходимо учесть точность представления решения на каждом шаге по времени и время существования единственного решения.

### 1. О МОДЕЛИ ОБЛАСТИ С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ.

С точки зрения Лагранжа закон движения сплошной среды определяется траекторией каждой индивидуальной частицы, совокупность которых составляет некоторый объем. Предполагается, что для любой частицы из  $D^+$ , индивидуализированной своим начальным положением  $z(t_0) = z_0$ , можно положить закон движения в виде аналитической функции от времени  $t$ . Тогда область  $\bar{D}^+$  представляет собой некоторый деформируемый объем, заполненный жидкостью, причем каждая точка  $z \in \bar{D}^+$  может рассматриваться как частица жидкости, перемещающаяся с комплексной скоростью  $V = u + iv$ . Комплексная скорость жидких частиц, составляющих границу  $L = \partial D$  будет определяться в предельных точках  $D^+$  и обозначаться  $W(\omega, t) = \frac{d\omega}{dt}$ , где  $\omega \in L$ .

Если комплексный потенциал течения  $\Phi(z, t) = \varphi + i\psi$  представлен в виде

$$\Phi(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega(t), t) \ln(z - \omega(t)) d\omega(t), \quad (1.1)$$

то для производной по времени  $t$  справедливо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(z, t) = & -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{W(\omega(t), t) f(\omega(t), t)}{z - \omega(t)} d\omega(t) \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_L \ln(z - \omega(t)) \frac{d}{dt} (f(\omega(t), t) d\omega(t)) \\ & + \frac{1}{2\pi i} W_0(\omega_0, t) \ln(z - \omega_0) f(\omega_0, t), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $W_0 = W(\omega_0, t)$  — скорость пополнения подвижной границы новыми жидкими частицами в точке границы  $\omega_0$ .

Для определения функции давления в любой точке  $z$  из  $D^+$  представление интеграла Коши–Лагранжа может иметь вид:

$$\frac{P(z, t)}{\rho} = -\operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial t} + \frac{V(z, t) \bar{V}(z, t)}{2} - G(z) \right\}, \quad (1.3)$$

где для комплексно-сопряженной и комплексной скорости в точке  $z \in D^+$  справедливо представление:

$$\bar{V}(z, t) = \frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial z} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega(t), t) d\omega(t)}{z - \omega(t)}, \quad (1.4)$$

$$V(z, t) = \overline{\bar{V}(z, t)}. \quad (1.5)$$

В силу того, что в  $D^+$  определены поле комплексной (соответственно комплексно-сопряженной) скорости и комплексный потенциал течения, при деформации области  $\bar{D}^+$  может быть поставлена задача Коши:

$$\frac{dz}{dt} = V(z, t), \quad \left( \frac{d\bar{z}}{dt} = \bar{V}(z, t) \right), \quad (1.6)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{V(z, t) \bar{V}(z, t)}{2} - G(z) + \frac{P(z, t)}{\rho}, \quad (1.7)$$

$$z(t_0) = z_0, \quad (\bar{z}(t_0) = \bar{z}_0), \quad (1.8)$$

$$\Phi(z, t_0) = \Phi_0(z), \quad (1.9)$$

имеющая место до момента времени  $t = t_0 + T$ , когда любая маркированная частица  $z(t)$  совпадет с какой-либо другой частицей из  $\bar{D}^+$  (т.е. до нарушения условия единственности решения).  $G(z)$  — заданный потенциал массовых сил.

Для точек  $z \rightarrow \omega$  в области  $\bar{D}^+$

$$G(z) = G(\omega), \quad P(z, t) = P(\omega, t), \quad (1.10)$$

$$\Phi(z, t) = \Phi(\omega, t), \quad \bar{V}(z, t) = \bar{V}^+(\omega, t),$$

где сингулярные интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши. В силу аналитичности функций  $z(t)$ ,  $\bar{V}(z, t)$  для оператора индивидуальной производной справедливо:

$$\frac{d^k}{dt^k} z(t) = \frac{D^{k-1}}{Dt^{k-1}} V(z, t), \quad k \geq 1, \quad (1.11)$$

где

$$\frac{D}{Dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{V}(z, t) \frac{\partial}{\partial z} + V(\bar{z}, t) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right). \quad (1.12)$$

Для траектории частицы в окрестности ее начального положения справедливо разложение в ряд Тейлора:

$$z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k. \quad (1.13)$$

Для определения значения потенциала  $\Phi$  в перемещающейся частице  $z(t)$  аналогично предыдущему справедливо:

$$\Phi(z(t), t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Phi^{(k)}}{k!} (t - t_0)^k, \quad (1.14)$$

где

$$z^{(k)} = \frac{d^k z}{dt^k}, \quad \Phi^{(k)} = \frac{d^k \Phi(z(t), t)}{dt^k}, \quad (1.15)$$

$t \in [t_0, t_0 + T)$ , где  $T$  — радиус сходимости рядов (1.14) и (1.15).

Разложение комплексно-сопряженное (1.13) в соответствии с (1.6), (1.11) и (1.12) может быть представлено в виде:

$$\bar{z}(t) = \bar{z}(t_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{Dt^k} \bar{V}(z, t_0) \frac{(t - t_0)^{k+1}}{(k+1)!}. \quad (1.16)$$

Оставив в разложениях (1.13), (1.14) (или в (1.16)) нужное число слагаемых, можно с требуемой точностью определить траекторию, кинематические и динамические характеристики элементарной жидкой частицы из  $\bar{D}^+$  при изменении ее положения в момент времени  $t_0 + \Delta t$ .

## 2. ОБ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАНЫХ РАЗБИЕНИЙ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ.

Будем считать, что граница  $L = \partial D^+$  связной области  $D^+$  в комплексной плоскости является кусочно-гладкой кривой, определяемой аналитическим представлением  $\omega(l) = \xi(l) + i\eta(l)$ , где  $l$  — параметр длины дуги, отсчитываемый от некоторой точки на  $L$ , причем в каждой окрестности точки гладкости  $l'$  кривой  $L$  определена ее кривизна

$$\kappa = \kappa(\omega(l')) \in C^1,$$

так, что для  $e^{i\alpha(l)} = \frac{d\omega}{dl}$  справедливо:

$$e^{i\alpha(l)} = e^{i\alpha(l')} \left( 1 + (l - l') i \kappa(l') + (l - l')^2 \left( \frac{i}{2} \frac{d\kappa}{dl}(l') - \kappa^2(l') \right) + \dots \right). \quad (2.1)$$

Положим, что совокупность действительных чисел  $\{l_k, k = 0, \dots, m\}$  определяет узлы разбиения по длине кривой  $L$ :

$$\{\omega\}_m = \{\omega_k = \omega(l_k), k = 0, \dots, m\}, \quad (2.2)$$

а  $L^k$  — дуга между точками  $\omega_{k-1}, \omega_k$ ,

$$L = \bigcup_{k=1}^m L^k. \quad (2.3)$$

В случае, когда  $L$  — замкнутая,  $\omega(l_0) = \omega(l_m)$  при  $l_0 \neq l_m$ .

Норму разбиения  $\{\omega\}_m$  кривой  $L$  определяем соотношением:

$$\sigma_m = \max_k \{|L^k| = l_k - l_{k-1}\}, \quad k = 1, \dots, m. \quad (2.4)$$

Разбиение  $\{\omega\}_m$  будет соответствовать и  $m$ -звенной ломаной  $L'$ , полученной соединением отрезками точек  $\omega_k$ ,  $k = 0, \dots, m$ . Норму разбиения конечно-звенной ломаной  $L'$  определяем соотношением

$$\sigma'_m = \max_k \{|L'^k| = |\omega_k - \omega_{k-1}|\}, \quad k = 1, \dots, m. \quad (2.4')$$

Число разбиения  $m$  и узлы разбиения  $\{\omega\}_m$  выбираются такими, чтобы на  $\forall L^k$  выполнялись условия

$$\forall \omega', \omega'' \quad |\omega' - \omega''| \leq |\omega_k - \omega_{k-1}|, \quad k = 1, \dots, m, \quad (2.5)$$

либо

$$|\omega_k - \omega_{k-1}| \ll \frac{1}{\kappa_k}, \quad \kappa_k = \max_{l \in L^k} |\kappa(l)|, \quad (2.6)$$

если  $\kappa(l') \neq 0, \infty$ .

Введем еще одно множество действительных чисел

$$\{l_{0k}, k = 1, \dots, m\}, \quad l_{0k} \in [l_{k-1}, l_k], \quad (2.7)$$

так, что можно определить множество узлов

$$\{\omega_0\}_m = \{\omega_{0k} = \omega(l_{0k}), k = 1, \dots, m\}, \quad (2.8)$$

каждый из которых находится на соответствующем элементе  $L_j$  кривой  $L$ . Выбранные таким образом множества  $\{\omega\}_m$  и  $\{\omega_0\}_m$  будем называть согласованным разбиением  $L$ . В каждом узле  $\omega_{0k}$  определим круг  $\Omega_k$  радиуса  $\delta_k$ , где

$$\delta_k = \max_{\omega \in L^k} |\omega - \omega_{0k}|, \quad k = 1, \dots, m. \quad (2.9)$$

Тогда объединение всех кругов образует конечное покрытие кривой  $L$ :

$$\Omega^m = \bigcup_{k=1}^m \Omega_k. \quad (2.10)$$

Если множество узлов  $\{\omega_0\}_m$  выбраны из условия

$$|\omega_{k-1} - \omega_{0k}| = |\omega_k - \omega_{0k}|, \quad k = 1, \dots, m, \quad (2.11)$$

то множества  $\{\omega\}_m$  и  $\{\omega_0\}_m$  будут называться каноническим разбиением кривой  $L$ .

Объединение кругов с центрами в точках  $\omega_{0k}$  и радиусами

$$\delta_{0k} = |\omega_{k-1} - \omega_{0k}| = |\omega_k - \omega_{0k}|, \quad k = 1, \dots, m, \quad (2.12)$$

также образуют конечное покрытие кривой  $L$ :

$$\Omega_0^m = \bigcup_{k=1}^m \Omega_{0k}. \quad (2.13)$$

Если  $|l_k - l_{k-1}| = \sigma_m$ ,  $k = 1, \dots, m$ , то разбиение  $\{\omega\}_m$  будет называться равномерным. При сгущении разбиения  $\{\omega\}_m$ , построенного с учетом условий (2.5), (2.6), получаем, что  $\delta_k \rightarrow 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $n \rightarrow \infty$ , а конечное покрытие  $\Omega'' \rightarrow L$ , т.е. все точнее покрывает границу  $\partial D^+ \equiv L$  (граница покрытия  $\Omega''$  все плотнее охватывает кривую  $L$ ), причем  $\sigma_m \leq \sigma_n$ ,  $m \leq n$ , при  $n \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим точку  $z \in D^+$ , тогда

$$\Delta = \min_{\omega \in L} |z - \omega| \quad (2.14)$$

определяет минимальное расстояние до кривой  $L$ . Зададим на  $L$  разбиение  $\{\omega\}_m$  удовлетворяющее условию:

$$\sigma_m < \min\left(\Delta, \min_L \left|\frac{1}{\varkappa}\right|\right), \quad (2.15)$$

тогда справедливо

$$\lambda = \frac{\sigma_m}{\Delta} < 1. \quad (2.16)$$

Рассмотрим в комплексной плоскости некоторое, соответствующее разбиению  $\{\omega\}_m$ , множество точек  $\{z_0\}_m$ , где для каждой  $z_{0k}$  можно определить круг  $\Omega'_k$  с радиусом

$$\delta'_k = \max_{\omega \in L^k} |\omega - z_{0k}|, \quad k = 1, \dots, m. \quad (2.17)$$

Объединение всех таких кругов образует некоторое конечное покрытие кривой  $L$ :

$$\Omega'^m = \bigcup_{k=1}^m \Omega'_k. \quad (2.18)$$

Если точка  $z_{0k}$  находится точно посередине отрезка между точками  $\omega_{k-1}$ ,  $\omega_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , т.е. выполняется условие для круга  $\Omega'_{0k}$ :

$$\delta'_{0k} = |\omega_{k-1} - z_{0k}| = |\omega_k - z_{0k}| = \frac{1}{2}|\omega_k - \omega_{k-1}|, \quad (2.19)$$

то конечное покрытие из таких кругов будет обозначаться:

$$\Omega_0^m = \bigcup_{k=1}^m \Omega'_{0k}. \quad (2.20)$$

Очевидно, что мера  $\mu(\Omega_0^m)$  произвольного конечного покрытия кривой  $L$  будет минимальной при выполнении условия (2.19) и для фиксированного разбиения  $\{\omega\}_m$  справедливо:

$$\mu(\Omega_0^m) \leq \pi \sum_{k=1}^m \delta_{0k}^2 \leq \mu(\Omega'^m) \leq \pi \sum_{k=1}^m \delta_k^2. \quad (2.21)$$

Пусть граница области  $\partial D^+ \equiv L$  является кусочно-гладкой кривой и в  $D^+$  заданы аналитические функции (посредством задания  $f(\omega)$  на  $L$ ), причем в силу (2.3) справедливо представление:

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega \quad (2.22)$$

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{z - \omega} d\omega = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} \frac{f(\omega)}{z - \omega} d\omega \quad (2.23)$$

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{(z - \omega)^n} d\omega = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} \frac{f(\omega)}{(z - \omega)^n} d\omega \quad (2.24)$$

В силу выбора множества  $\{z_0\}_m$ , отвечающего разбиению  $\{\omega\}_m$ , для (2.22), (2.23), (2.24) справедливо

$$\Phi_0(z) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega) \left\{ \ln(z - z_{0k}) + \ln \left( 1 - \frac{\omega - z_{0k}}{z - z_{0k}} \right) \right\} d\omega \quad (2.25)$$

$$\Phi_1(z) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} \frac{f(\omega)}{z - z_{0k}} \left( 1 - \frac{\omega - z_{0k}}{z - z_{0k}} \right)^{-1} d\omega \quad (2.26)$$

$$\Phi_n(z) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} \frac{f(\omega)}{(z - z_{0k})^n} \left( 1 - \frac{\omega - z_{0k}}{z - z_{0k}} \right)^{-n} d\omega \quad (2.27)$$

Обозначим  $\Delta_k = |z - z_{0k}|$ , тогда, если

$$\lambda'_k = \frac{\delta'_k}{\Delta_k} < 1, \quad k = 1, \dots, m, \quad (2.28)$$

где  $\delta'_k$  определено из условия (2.17), то для (2.25), (2.26), (2.27) справедливо асимптотическое представление

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i} \ln(z - z_{0k}) \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega) d\omega \\ &\quad - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left( \frac{\omega - z_{0k}}{z - z_{0k}} \right)^j d\omega \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i(z - z_{0k})} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega) d\omega \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i(z - z_{0k})} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega) \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{\omega - z_{0k}}{z - z_{0k}} \right)^j d\omega \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \Phi_n(z) &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i(z - z_{0k})^n} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega) d\omega \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i(z - z_{0k})^n} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(n+j-1)!}{(n-1)!j!} \left( \frac{\omega - z_{0k}}{z - z_{0k}} \right)^j d\omega \end{aligned} \quad (2.31)$$

*Замечание 1.* Условие (2.28) означает, что для  $\forall k$  точка  $z$  лежит вне кругов  $\Omega'_k$  (с центрами в точках  $z_{0k}$ ), замыкание которых целиком содержит соответствующие граничные элементы  $L^k$ . Условие (2.28) является необходимым для существования и сходимости рядов в асимптотических представлениях (2.29), (2.30), (2.31).

**Лемма 1.** Если  $f(\omega)$  интегрируема на  $L^k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , а  $z$  и  $z_{0k}$  удовлетворяют (2.28), то для  $z$  вне  $\Omega'^m$  справедливо:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i} \ln(z - z_{0k}) \int_{L^k} f(\omega) d\omega \right| < O(\Gamma\lambda), \quad (2.32)$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{z - \omega} d\omega - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i(z - z_{0k})} \int_{L^k} f(\omega) d\omega \right| < O\left(\frac{\Gamma\lambda}{\Delta_0}\right), \quad (2.33)$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{(z - \omega)^n} d\omega - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i(z - z_{0k})^n} \int_{L^k} f(\omega) d\omega \right| < O\left(\frac{\Gamma\lambda}{\Delta_0^n}\right), \quad (2.34)$$

где

$$\Delta_0 = \min_k |z - z_{0k}|, \quad (2.35)$$

$$\lambda = \max_k \lambda'_k < 1, \quad k = 1, \dots, m. \quad (2.36)$$

$$\Gamma = \left| \sum_{k=1}^m \int_{L^k} f(\omega) d\omega \right| = \left| \int_L f(\omega) d\omega \right|. \quad (2.37)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i j} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega) \left( \frac{\omega - z_{0k}}{z - z_{0k}} \right)^j d\omega \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^m \frac{(\lambda'_k)^j}{2\pi i j} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega) d\omega \right| \\ & < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j}{2\pi j} \left| \sum_{k=1}^m \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega) d\omega \right| = \frac{\Gamma}{2\pi} |\ln(1 - \lambda)| \sim O(\Gamma\lambda), \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i j (z - z_{0k})} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega) \left( \frac{\omega - z_{0k}}{z - z_{0k}} \right)^j d\omega \right| \\ & \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^m \frac{(\lambda'_k)^j}{2\pi i j (z - z_{0k})} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega) d\omega \right| < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j}{2\pi \Delta_0} \left| \sum_{k=1}^m \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega) d\omega \right| \\ & = \frac{\Gamma}{2\pi \Delta_0} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j = \frac{\Gamma}{2\pi \Delta_0} ((1 - \lambda)^{-1} - 1) \sim O\left(\frac{\Gamma\lambda}{\Delta_0}\right), \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i j (z - z_{0k})^n} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega) \frac{(n + j - 1)!}{(n - 1)! j!} \left( \frac{\omega - z_{0k}}{z - z_{0k}} \right)^j d\omega \right| \\ & \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^m \frac{(\lambda'_k)^j}{2\pi i j (z - z_{0k})^n} \cdot \frac{(n + j - 1)!}{(n - 1)! j!} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega) d\omega \right| \\ & = \frac{\Gamma}{2\pi \Delta_0^n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j (n + j - 1)!}{(n - 1)! j!} = \frac{\Gamma}{2\pi \Delta_0^n} ((1 - \lambda)^{-n} - 1) \sim O\left(\frac{\Gamma\lambda}{\Delta_0^n}\right). \end{aligned} \quad (2.40)$$

□

**Лемма 2.** Если  $f(\omega)$  — кусочно непрерывная, ограниченная функция, а  $z$  и  $z_{0k}$  удовлетворяют (2.28), то для  $z$  вне  $\Omega^m$  справедливо:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i} \ln(z - z_{0k}) \int_{L^k} f(\omega) d\omega \right| < O(\hat{f}_0 m \lambda \delta), \quad (2.41)$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{z - \omega} d\omega - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i (z - z_{0k})} \int_{L^k} f(\omega) d\omega \right| < O(\hat{f}_0 m \lambda^2), \quad (2.42)$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{(z - \omega)^n} d\omega - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i (z - z_{0k})^n} \int_{L^k} f(\omega) d\omega \right| < O\left(\frac{\hat{f}_0 m \lambda^2}{\Delta_0^{n-1}}\right). \quad (2.43)$$

Доказательство. Пусть

$$\hat{f}_k = \max_{\omega \in L^k} |f(\omega)|, \quad k = 1, \dots, m, \quad (2.44)$$

$$\hat{f}_0 = \max_k \hat{f}_k, \quad (2.45)$$

$$\delta_k = \max_{\omega \in L^k} |\omega - z_{0k}|, \quad (2.46)$$

$$\delta = \max_k \delta_k, \quad \Delta_0 = \min_k \Delta_k. \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega) \left( \frac{\omega - z_{0k}}{z - z_{0k}} \right)^j d\omega \right| \\ & \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \frac{\hat{f}_k}{2\pi j(j+1)} \left| \frac{(\omega_k - z_{0k})^{j+1} - (\omega_{k-1} - z_{0k})^{j+1}}{(z - z_{0k})^j} \right| \\ & \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \frac{\hat{f}_0}{2\pi j(j+1)} \left| \frac{2(\delta_k)^{j+1}}{(z - z_{0k})^j} \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{m\hat{f}_0\delta}{\pi j(j+1)} \lambda \leq m \frac{\hat{f}_0\delta}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j(j+1)} \\ & < m \frac{\hat{f}_0\delta}{\pi} |\ln(1 - \lambda)| \sim O(\hat{f}_0 m \lambda \delta), \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi j(z - z_{0k})} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega) \left( \frac{\omega - z_{0k}}{z - z_{0k}} \right)^j d\omega \right| \\ & \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \frac{\hat{f}_k}{2\pi(j+1)} \left| \frac{(\omega_k - z_{0k})^{j+1} - (\omega_{k-1} - z_{0k})^{j+1}}{(z - z_{0k})^{j+1}} \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{m\hat{f}_0\lambda^{j+1}}{\pi(j+1)} \\ & < \frac{m\hat{f}_0}{\pi} \lambda((1 - \lambda)^{-1} - 1) \sim O(\hat{f}_0 m \lambda^2), \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i(z - z_{0k})^n} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega) \frac{(n+j-1)!}{(n-1)!j!} \left( \frac{\omega - z_{0k}}{z - z_{0k}} \right)^j d\omega \right| \\ & \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \frac{(n+j-1)! \hat{f}_k}{2\pi(n-1)!j!} \left| \frac{(\omega_k - z_{0k})^{j+1} - (\omega_{k-1} - z_{0k})^{j+1}}{(z - z_{0k})^{n+j}(j+1)} \right| \\ & < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(n+j-1)! \hat{f}_k \lambda^{j+1}}{(n-1)!(j+1)! \pi \Delta_0^{n-1}} < \frac{m\hat{f}_0}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{\Delta_0^{n-1}} ((1 - \lambda)^{-n} - 1) \sim O\left(\frac{\hat{f}_0 m \lambda^2}{\Delta_0^{n-1}}\right). \end{aligned} \quad (2.50)$$

□

**Замечание 2.** Следует отметить, что погрешность представлений (2.41)–(2.43) и (2.48)–(2.50) может быть уменьшена, если минимизировать радиусы  $\delta_k$  окружностей с центром в точках  $z_{0k}$ ,  $k = 1, \dots, m$ . Очевидно, что минимальный радиус у соответствующих окружностей будет, если выбрать центры  $z_{0k}$  точно по середине между соответствующими узлами  $\omega_{k-1}$  и  $\omega_k$  разбиения  $\{\omega\}_m$ .

**Лемма 3.** Если  $f(\omega)$  кусочно-непрерывная, ограниченная функция, а  $z_{0k} = (\omega_{k-1} + \omega_k)/2$ ,  $k = 1, \dots, m$ , где  $\{\omega\}_m$  — разбиение гладкой кривой  $L$ , удовлетворяющее

условию (2.15), а  $z$  и  $z_{0k}$  удовлетворяют (2.28), тогда для  $z \notin \Omega'^m$  справедливо:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i} \ln(z - z_{0k}) \int_{L^k} f(\omega) d\omega \right| < O(\hat{f}_0 m \delta \lambda^2), \quad (2.51)$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{z - \omega} d\omega - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i (z - z_{0k})} \int_{L^k} f(\omega) d\omega \right| < O(\hat{f}_0 m \lambda^3), \quad (2.52)$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{(z - \omega)^n} d\omega - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i (z - z_{0k})^n} \int_{L^k} f(\omega) d\omega \right| < O\left(\frac{\hat{f}_0 m \lambda^3}{\Delta_0^{n-1}}\right). \quad (2.53)$$

*Доказательство.* Пусть

$$\hat{f}_k = \max_{\omega \in L^k} |f(\omega)|, \quad k = 1, \dots, m, \quad (2.54)$$

$$\hat{f}_0 = \max_k \hat{f}_k, \quad (2.55)$$

$$h_k = \frac{1}{2}(\omega_k - \omega_{k-1}), \quad z_{0k} = \omega_k - h_k = \omega_{k-1} + h_k, \quad (2.56)$$

$$\delta_k = |h_k|, \quad k = 1, \dots, m, \quad \delta = \max_k \delta_k \leq \sigma_m, \quad (2.57)$$

$$\Delta_0 = \min_k |z - z_{0k}|. \quad (2.58)$$

Таким образом,  $\omega_{k-1} = z_{0k} - h_k$ ,  $\omega_k = z_{0k} + h_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ .

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i j} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega) \left(\frac{\omega - z_{0k}}{z - z_{0k}}\right)^j d\omega \right| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\hat{f}_0}{2\pi j(j+1)} \sum_{k=1}^m \left| \frac{h_k^{j+1} - (-h_k)^{j+1}}{(z - z_{0k})^j} \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\hat{f}_0}{2\pi j(j+1)} \sum_{k=1}^m \left| \frac{(h_k)^{j+1} - (-h_k)^{j+1}}{\Delta_k^j} \right| \leq \frac{\hat{f}_0 m \delta}{3\pi} \lambda^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{m \hat{f}_0 \delta \lambda^{(2j+1)}}{\pi j(2j+1)(j+1)} \\ &\sim O(\hat{f}_0 m \delta \lambda^2), \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i (z - z_{0k})} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega) \left(\frac{\omega - z_{0k}}{z - z_{0k}}\right)^j d\omega \right| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \frac{\hat{f}_k}{2\pi(j+1)} \left| \frac{h_k^{j+1} - (-h_k)^{j+1}}{\Delta_k^{j+1}} \right| \\ &\leq \frac{\hat{f}_0 m \lambda^3}{3\pi} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\hat{f}_0 m}{2\pi(2j+1)} \lambda^{2j+1} \sim O(\hat{f}_0 m \lambda^3), \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i (z - z_{0k})^n} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega) \frac{(n+j-1)!}{(n-1)! j!} \left(\frac{\omega - z_{0k}}{z - z_{0k}}\right)^j d\omega \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \frac{\hat{f}_k (n+j-1)!}{2\pi (n-1)! (j+1)!} \left| \frac{h_k^{j+1} - (-h_k)^{j+1}}{\Delta_k^{j+1}} \right| \leq \sum_{j=2}^{\infty} \frac{m \hat{f}_0 (n+2j)!}{\pi (n-1)! (2j+1)!} \cdot \frac{\lambda^{2j+1}}{\Delta_0^{n-1}} \\ &= \frac{m \hat{f}_0 (n+4)!}{\pi (n-1)! 3!} \cdot \frac{\lambda^3}{\Delta_0^{n-1}} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{m \hat{f}_0 (n+2j)!}{\pi (n-1)! (2j+1)!} \cdot \frac{\lambda^{2j+1}}{\Delta_0^{n-1}} \sim O\left(\frac{\hat{f}_0 m \lambda^3}{\Delta_0^{n-1}}\right). \end{aligned} \quad (2.61)$$

□

*Замечание 3.* Следует отметить, что оценки (2.41)–(2.43) и (2.48)–(2.50) остаются справедливыми при  $z_{0k} \in L_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , т.е. при использовании согласованного разбиения  $\{\omega\}_m \{\omega_0\}_m$ .

В силу изложенного справедливы следующие теоремы.

**Теорема 1.** Если аналитическая функция имеет представления вида (2.22)–(2.24), где плотность  $f$  интегрируема на каждом элементе границы  $L^k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , то для  $\forall m, \forall \{\omega\}_m, \exists \{z_0\}_m$ , что  $\forall z \in \bar{D}^+ \setminus \Omega^m$  справедливы оценки:

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i} \ln(z - z_{0k}) \int_{L^k} f(\omega) d\omega \right\|_C \leq A_0 \Gamma \lambda, \quad (2.62)$$

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{z - \omega} d\omega - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i (z - z_{0k})} \int_{L^k} f(\omega) d\omega \right\|_C \leq A_1 \Gamma \frac{\lambda}{\Delta_0}, \quad (2.63)$$

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{(z - \omega)^n} d\omega - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i (z - z_{0k})^n} \int_{L^k} f(\omega) d\omega \right\|_C \leq A_n \Gamma \frac{\lambda}{\Delta_0^n}, \quad (2.64)$$

где

$$\Delta_0 = \min_k |z - z_{0k}|, \quad \Delta_k = |z - z_{0k}|, \quad (2.65)$$

$$\Gamma = \left| \int_L f(\omega) d\omega \right|, \quad (2.66)$$

$$\lambda = \max_k \lambda'_k < 1, \quad (2.67)$$

$$\lambda'_k = \frac{\delta'_k}{\Delta_k} < 1, \quad (2.68)$$

$$\Omega_k = \{z: |z - z_{0k}| \leq \delta'_k = \max_{\omega \in L^k} |\omega - z_{0k}|\}, \quad (2.69)$$

$$\Omega^m = \bigcup_{k=1}^m \Omega_k, \quad (2.70)$$

$A_j$  — некоторая константа,  $j = 0, 1, \dots$

**Теорема 2.** Если аналитическая функция имеет представления вида (2.22)–(2.24), где плотность  $f$  кусочно-непрерывная, ограниченная на  $L$ , то для  $\forall m, \forall \{\omega\}_m, \exists \{z_0\}_m$ , что  $\forall z \in \bar{D}^+ \setminus \Omega^m$  справедливы оценки:

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i} \ln(z - z_{0k}) \int_{L^k} f(\omega) d\omega \right\|_C \leq A_0 \hat{f}_0 m \sigma_m \lambda^2, \quad (2.71)$$

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{z - \omega} d\omega - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i (z - z_{0k})} \int_{L^k} f(\omega) d\omega \right\|_C \leq A_1 \hat{f}_0 m \lambda^3, \quad (2.72)$$

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{(z - \omega)^n} d\omega - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i (z - z_{0k})^n} \int_{L^k} f(\omega) d\omega \right\|_C \leq A_n \hat{f}_0 \frac{m \lambda^3}{\Delta_0^{n-1}}, \quad (2.73)$$

где

$$\Delta_0 = \min_k |z - z_{0k}|, \quad (2.74)$$

$$\Delta_k = |z - z_{0k}|, \quad (2.75)$$

$$\lambda = \max_k \lambda'_k < 1, \quad (2.76)$$

$$\lambda'_k = \frac{\delta'_k}{\Delta_k} < 1, \quad (2.77)$$

$$\Omega_k = \{z: |z - z_{0k}| \leq \delta'_k = \max_{\omega \in L^k} |\omega - z_{0k}|\}, \quad (2.78)$$

$$\Omega^m = \bigcup_{k=1}^m \Omega_k, \quad (2.79)$$

$$\hat{f}_0 = \max_{\omega \in L} |f(\omega)|, \quad (2.80)$$

$A_j$  — некоторая константа,  $j = 0, 1, \dots$

**Теорема 3.** Если аналитическая функция имеет в  $D^+$  одно из представлений вида (2.22)–(2.24), где плотность  $f$  — кусочно-непрерывная, ограниченная функция на гладкой  $L$ , то  $\exists m$  и  $\exists \{\omega\}_m$  и  $\exists \{\omega_0\}_m$  (согласованное разбиение кривой  $L$ ), что  $\forall z \in \bar{D}^+$  справедливы оценки (2.71)–(2.73).

**Замечание 4.** Если согласованное разбиение таково, что каждый граничный элемент  $L_k$  является гладкой дугой, так что выполняется условие

$$\sigma_m \ll \min \left( \Delta, \min \left| \frac{1}{\varkappa} \right| \right), \quad (2.81)$$

то оценки (2.71)–(2.73) справедливы именно для канонического разбиения, а конечное покрытие  $\Omega_0^m$  кривой  $L$  будет состоять из цепочки кругов  $\Omega_{0k}$ ,  $k = 1, \dots, m$ , причем мера  $\mu(\Omega_0^m) \rightarrow 0$  при сгущении канонического разбиения (при  $m \rightarrow \infty$ ).

### 3. УЧЕТ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ

В силу того, что минимальные по модулю значения скорости имеют место в граничных точках области  $D^+$ , рассматривается относительное (касательное к границе) движение жидких частиц, примыкающих к границе  $L = \partial D^+$ .

Пусть для двух произвольных близких частиц с дуговыми параметрами  $l_1$  и  $l_2$ ,  $dl = l_2 - l_1$ , определены законы их перемещения вдоль  $L$ :

$$l_1(t+T) = l_1(t) + T_0 W_1(t) + O(T_0^2), \quad (3.1)$$

$$l_2(t+T) = l_2(t) + T_0 W_2(t) + O(T_0^2),$$

где  $W_1$  и  $W_2$  — соответствующие касательные к  $L$  скорости. В случае совпадения положения частиц в момент  $t+T$  ( $l_1(t+T) = l_2(t+T)$ ) происходит нарушение единственности решения задачи (1.6)–(1.10). В силу чего справедливо:

$$dl + T(W_2 - W_1) + O(T_0^2) = 0. \quad (3.2)$$

Переходя к пределу при  $dl \rightarrow 0$ , получаем

$$T(l) = - \left( \frac{dW}{dl} \right)^{-1} \quad (3.3)$$

— локальное время, через которое произойдет "коллапс" элемента  $dl$  границы  $L$  в точке с координатой  $l$ . Ввиду того, что всегда  $T_0(l) \geq 0$ , получаем, что необходимое условие наступления "коллапса":

$$\frac{dW}{dl} < 0, \quad (3.4)$$

где  $W(l)$  — касательная к  $L$  скорость. Исходя из (3.3), можно ввести локальное "кинематическое" ограничение при разбиении  $L$  на граничные элементы  $L^k$ :

$$|L^k| \leq \min \left\{ \frac{2^{-1} \max_{\omega \in L^k} |W|}{\max_{\omega \in L^k} \frac{dW}{dl}}, \frac{1}{\max_{\omega \in L^k} |\varkappa(\omega)|} \right\}, \quad k = 1, \dots, m, \quad (3.5)$$

где  $\kappa(\omega)$  — локальная кривизна  $L$ . Локальное время (3.3) в первом приближении ограничивает радиус сходимости рядов (1.13)–(1.16) и ограничивает выбор шага интегрирования по времени  $t$  при численном решении задачи (1.6)–(1.10). Исходя из условий (2.81) и (3.5), получаем условие для нормы разбиения  $\{\omega\}_m$  границы  $L$ :

$$\sigma_m = \max_k \min \left\{ \Delta, \min_{l \in L^k} \left| \frac{1}{\kappa(l)} \right|, \frac{2^{-1} \max_{l \in L^k} |W|}{\max_{l \in L^k} \left| \frac{dW}{dl} \right|} \right\} \quad (3.6)$$

и ограничение на время существования единственного решения:

$$t < T_1 = \min_l T_0(l). \quad (3.7)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Лаврентьев, Б. И. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, "Наука", Москва, 1987.
2. Н. И. Мухелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения*, "ГИФМЛ", Москва, 1962.
3. Ф. Д. Гахов, *Краевые задачи*, "Наука", Москва, 1977.
4. А. И. Некрасов, *Собрание сочинений*, т. 2, "Изд-во АН СССР", Москва, 1962.
5. Н. Е. Кочин, *Собрание сочинений*, т. 2, "Изд-во АН СССР", Москва, 1962.
6. Г. Биркгоф, Э. Сарантонелло, *Струи, следы и каверны*, "Мир", Москва, 1964.
7. В. Н. Монахов, *Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений*, "Наука", Новосибирск, 1977.
8. Л. Милн-Томсон, *Теоретическая гидродинамика*, "Мир", Москва, 1964.
9. Дж. Л. Уолш, *Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области*, "Изд-во иностр. лит.", Москва, 1961.
10. И. К. Лифанов, *Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент*, ТОО "Янус", Москва, 1995.
11. С. Белоцерковский, В. Н. Котовский, И. Ништ, Р. Федоров, *Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел*, "Наука", Москва, 1988.
12. Т. Громадка II, Ч. Лей, *Комплексный метод граничных элементов в инженерных задачах*, "Мир", Москва, 1990.
13. А. Лаврентьев, *О построении потока, обтекающего дугу заданной формы*, Труды ЦАГИ, "ГААИ", Москва, 1932.
14. Т. Сарпкаяя, *Вычислительные методы вихрей. Фримановская лекция (1988)*, Труды Американского общества инженеров-механиков. Современное машиностроение. Серия А, N 10, "Мир", Москва, 1989, стор. 1–60.

КИЕВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. ТАРАСА ШЕВЧЕНКО, ФАКУЛЬТЕТ КИБЕРНЕТИКИ, 252601, КИЕВ,  
УЛ. ВЛАДИМИРСКАЯ 64

Поступила 13.10.96