Журнал обчисл. прикл. матем.
Вип. 1, 2000, стор. 1–60

J. Comput. Appl. Math.
No. 85, 2000, pp. 1–60

FD-МЕТОД ДЛЯ ЗАДАЧ ШТУРМА–ЛІУВІЛЛЯ. ЕКСПОНЕНЦІЙНА ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ

УДК 519.624.2

Б. Й. БАНДИРСЬКИЙ, В. Л. МАКАРОВ ТА О. Л. УХАНЬОВ

Резюме. Для задачі Штурма–Ліувілля знайдені конструктивні достатні умови, що забезпечують швидкість збіжності FD-методу при $m \to \infty$ не повільніше ніж у геометричної прогресії, як для умов Діріхле, так і умов третього роду. Побудовані ефективні апріорні та апріорно-апостеріорні оцінки точності FD-методу для всіх власних значень і всіх власних функцій, з яких випливають строгі двосторонні оцінки, що стають тим вужче, чим старше номер власного значення. Доведена теорема про достатні умови збіжності FD-методу при $m \to \infty$ для випадку умов періодичності. Знайдена нова методика її доведення дозволила подолати проблему малих знаменників, що породжується кратністю власних значень незбуреної задачі. Одержано узагальнення класичних асимптотичних розвинень для розв'язків задачі Штурма–Ліувілля.

Вступ

Багато математиків займалися і продовжують займатися проблемою побудови дискретних апроксимацій високого порядку точності для задач Штурма–Ліувілля. Тут слід згадати такі прізвища, як Бабенко К. І. [1–2], Бабушка І. [3], Осборн Дж. [4–5], Andrew A. L. [6–9], Pryce J. D. [10], Приказчиков В. Г. [11–13], Гулд С. [14], Вайнштейн А. [15–16], Гаврилюк І. П. [17–20], Макаров В. Л. [17–26], Алгазін С. Д. [2, 50–51], Kreiss H.-O. [28], Стренг І. [29], Фікс Дж. [29–31], Quarteroni A. [32], Марчук Г. І. [33], Шайдуров В. В. [33–34], Коллатц Л. [35], Самарський О. А. [36–38], Тихонов А. М. [37–38] та інші.

Основні підходи, за допомогою яких одержуються дискретні апроксимації задач на власні значення, є: метод скінченних різниць, метод скінченних елементів, спектральні та псевдоспектральні методи. Але всі ці методи мають суттєвий недолік: швидкість їх збіжності залежить від порядкового номера відповідного власного значення і чим старше його номер, тим гірша одержується точність. Один із шляхів подолання цього недоліка є асимптотична корекція обчислених власних значень (чи за допомогою методу скінченних різниць, чи за допомогою методу скінченних елементів). Огляд результатів з асимптотичної корекції на 1994 р. міститься в [9].

Наведемо деякі з цих результатів. Добре відомо, що для одержання хороших наближень для власних значень з високими порядковими номерами k слід використовувати класичний асимптотичний аналіз. Але в деяких випадках, як вказується у [39], цей підхід незадовільний за точністю крім дуже високих номерів k. У [40–42] було показано, що рівномірні оцінки точності за номером k для всіх власних значень можна одержати, комбінуючи стандартний чисельний метод для низьких власних значень з асимптотичною формулою для високих. Якщо точність чисельного методу зростає (і витрати на його реалізацію), тоді число власних значень, які оцінюються чисельно, також зростає. Але при використанні класичних методів скінченних різниць або скінченних елементів зазначений комбінований підхід є дуже неефективним для одержання високої точності за виключенням дуже низьких або дуже великих за номером k власних значень.

Асимптотична корекція вперше була вивчена в [40, 43] у зв'язку з класичною центральною апроксимацією другого порядку регулярної задачі Штурма–Ліувілля

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \qquad x \in (0, \pi), \tag{0.1}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0. \tag{0.2}$$

Головна ідея полягає в тому, що похибка обчислених власних значень $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots$ для великих k не є дуже чутливою для помірних змін $q(x)$. Якщо використовується рівномірна сітка з кроком $h = \pi/(n+1)$, похибка $e_{k,n}$ в оцінці $\lambda_k - \lambda_{k,n}$ для $q(x) \equiv \text{const}$ різницевої схеми з центральною другою різницею відома у явному вигляді

$$e_{k,n}\big|_{q(x)\equiv\text{const}} = k^2 - 4\sin^2(kh/2)/h^2. \tag{0.3}$$

Асимптотична корекція $\lambda_{k,n}$ тоді здійснюється за правилом

$$\tilde{\lambda}_{k,n} = \lambda_{k,n} + \left[k^2 - 4\sin^2(kh/2)/h^2\right], \tag{0.4}$$

тобто обчислене власне значення $\lambda_{k,n}$ коректується за допомогою точної похибки для випадку $q(x) \equiv \text{const}$. Для цього випадку відомо, що $\lambda_{k,n} - \lambda_k = o\left(k^4h^2\right)$. У [44] було доведене наступне твердження.

Теорема 1. *Для всіх $q(x) \in C^2[0, \pi]$ існує така стала c, що для всіх $n \in \mathbf{N}$*

$$\left|\tilde{\lambda}_{k,n} - \lambda_k\right| \leqslant ck^2h^3/\sin(kh), \qquad k = 1, \dots, n, \tag{0.5}$$

де c залежить від q і зростає із зростанням q' та q'', але не залежить від k та n.

Зауважимо, що тут нема традиційного обмеження, що kh є достатньо малим числом. І ще одне. Дуже високі власні значення можуть бути обчислені суто асимптотичними методами. Однак асимптотична корекція суттєво збільшує кількість обчислених власних значень, які є більш точними, ніж це дають асимптотичні оцінки, що значно зменшує витрати на досягнення заданої точності.

Якщо $q(x) \equiv \text{const}$, то розв'язок рівняння (0.1) з будь-якими з нижченаведених крайових умов

$$\cos\alpha y(0) + \sin\alpha y'(0) = \cos\beta y(\pi) + \sin\beta y'(\pi) = 0, \tag{0.6}$$

$$\alpha = 0, \qquad \beta = \frac{\pi}{2}, \tag{0.7}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \qquad \beta = 0, \tag{0.8}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \qquad \beta = \frac{\pi}{2}, \tag{0.9}$$

$$y(0) = y(\pi), \qquad y'(0) = y'(\pi), \tag{0.10}$$

$$y(0) = -y(\pi), \qquad y'(0) = -y'(\pi), \tag{0.11}$$

а також центральною скінченно різницевою апроксимацією другого порядку записується в явному вигляді і у [45] для всіх цих випадків доведено аналог теореми 1. У [46] було розповсюджено асимптотичну корекцію на випадок загальних крайових умов (0.6), куди однак не входять періодичні та антиперіодичні умови (0.10), (0.11). Також було показано, що для достатньо малих kh похибка скоректованої оцінки є $O\left(h^2\right)$, яка є кращою ніж $O\left(kh^2\right)$, разом з цим в їх доведенні вимагається $\sin\alpha \neq 0$ в (0.6). Випадок умов (0.10) і (0.11) окремо був розглянутий у [47].

Для умов Діріхле ($\sin\alpha = 0$ та $\sin\beta = 0$) більш кращі оцінки були одержані за допомогою Numerov's методу у [44] та [48]. Нехай $\Lambda_{k,n}$ означає апроксимацію λ_k, одержану за допомогою Numerov's методу на рівномірній сітці з кроком $h = \pi/(n+1)$ Позначимо

$$\tilde{\Lambda}_{k,n} = \Lambda_{k,n} + k^2 - \frac{12\sin^2(kh/2)}{h^2\left[3-\sin^2(kh/2)\right]}. \tag{0.12}$$

Була доведена наступна

Теорема 2 [44]. *Для всіх $q(x) \in C^4[0,\pi]$ існує така стала c, що залежить тільки від q, що для всіх $n \in \mathrm{N}$ та $k = 1,\dots,n$*

$$\left|\tilde{\Lambda}_{k,n} - \lambda_k\right| \leqslant ck^4h^5/\sin(kh). \tag{0.13}$$

Асимптотична корекція також ефективна у сполученні з методом скінченних елементів. Аналог теореми 1 для цього методу з кусково-лінійними координатними функціями було одержано у [49] для умов Діріхле, а для умов (0.6)–(0.11) у [45]. Чисельні результати показали, що для $n/4 < k < 3n/4$ асимптотична корекція більш ефективна з методом скінченних елементів ніж з методом скінченних різниць.

Зробимо деякі зауваження щодо теорем 1, 2.

Перше. Хоча для справедливості оцінок (0.5) і (0.13) не вимагається, щоб величина kh була достатньо малою, але разом з тим якість їх погіршується із зростанням k. Від $O(h^2)$ для молодших власних значень до $O(h)$ для старших в оцінці (0.5) і від $O(h^4)$ до $O(h)$ в оцінці (0.13).

Друге. Кількість власних значень, яка обчислюється, одразу фіксується вибором кроку h. І якщо раптом з'явиться необхідність обчислити більш старші власні значення, тоді треба буде заново будувати схему дискретизації.

Трете. Нічого не вказується про наближення власних функцій.

Четверте. Присутність в оцінках (0.5) і (0.13) невизначеної сталої c не дає можливості a priori по заданій точності ε, з якою треба знайти k-те власне значення, вказати такий крок h, що цю точність забезпечить.

Більш точні результати одержуються за допомогою поєднання асимптотичної корекції з екстраполяцією за Річардсоном, але вони мають ті ж самі, пераховані вище, вади.

Результати, обговорені вище, показують, як асимптотична корекція за рахунок незначного збільшення обчислювальних витрат підвищує точність вищих власних значень, обчислених деяким чисельним методом з використанням апроксимації власних функцій кусково поліноміально.

В певному сенсі сюди примикають методи без насичення точності (спектральні, псевдоспектральні).

В роботах [1] та [50–51] було запропоновано метод, що грунтується на заміні власної функції інтерполяційним поліномом з Чебишевськими вузлами, швидкість збіжності якого для аналітичних власних функцій з фіксованим номером є експоненційною. Разом з тим, для цього методу мають місце всі недоліки, крім третього, що пераховані для асимптотичної корекції.

Один з альтернативних підходів полягає в апроксимації коефіцієнтів диференціального рівняння, що має більші переваги ніж апроксимація власних функцій безпосередньо. Як правило, коефіцієнти заміняються кусково-сталими функціями, бо на кожному підінтервалі, де ці нові коефіцієнти сталі, можна записати загальний розв'язок рівняння, а довільні параметри знаходити через умови зшивки у точках розривів. Цей підхід розвивався у роботах [8, 10, 59] та інших і використаний у відомому пакеті програм SLEDGE [53]. Цей метод (в літературі його інколи називають Pruess метод або метод апроксимації диференціального рівняння) використовується також для обчислення двосторонніх оцінок власних значень і приводить до рівномірних оцінок точності. Для регулярної задачі у нормальній формі Ліувілля з $q(x) \in C^2[a,b]$ у [41] було показано, що, коли функція $\tilde{q}(x)$, якою замінюється $q(x)$, є сходинкова функція і $\tilde{q}(x) = q((x_{i-1}+x_i)/2)$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, тоді існують таке ціле n_0 і така стала c, що

$$\left|\lambda_k - \tilde{\lambda}_k\right| \leqslant cn^{-2}, \qquad k = 1, \ldots, [n/2] \quad \text{для всіх } n \geqslant n_0,$$

де n дорівнює кількості підінтервалів, на які ділиться проміжок інтегрування. У [54] було показано, що рівномірно другий порядок точності можна також одержати для $k > [n/2]$ за допомогою простої корекції.

Огляд робіт, присвячених методу апроксимації диференціального рівняння, дан у [6]. Зокрема, сюди відносяться роботи, в яких для радіального рівняння Шрьодінгера використовується техніка збурючуєї корекції, запропонована у [55] і далі розвинута у [56] та [57]. Для рівняння Хілла у [58] було використано метод наближення диференціального рівняння без збурючуєї корекції і для задачі на власні значення для звичайних диференціальних рівнянь високого порядку з кусково-неперервними коефіцієнтами такий підхід був використаний у [59].

Використовуючи ідеї з [60] та [61], у [7] було показано, що, застосовуючи теореми порівняння, метод апроксимації диференційного рівняння дає можливість одержати строгі двосторонні границі для власних значень задачі Штурма–Ліувілля, що є краще ніж просто оцінки. У [7] для частинного випадку і у [6] для загального випадку було показано, що, коли $h = \max(x_i - x_{i-1}) \to 0$, збіжність границь до точних власних значень є $O(h)$. Разом з тим чисельні розрахунки показували, що реальна швидкість збіжності верхньої та нижньої границь має порядок $O(h^2)$. Теоретично це було доведено у [49] при досить загальних умовах.

У [55] запропоновано крім кусково сталої апроксимації коефіцієнта $q(x)$ використовувати кусково лінійну та кусково квадратичну апроксимації. Тоді на кожному підінтервалі, де $q(x)$ або лінійна, або квадратична, загальний розв'язок рівняння другого порядку пишеться також в явному вигляді через функції Бесселя та параболічного циліндру відповідно. А далі застосовується ідеологія Pruess методу.

До недоліків вищевикладеного підходу можна віднести наступні.

Перше. Для досягнення заданої точності треба вибирати досить мілке розбиття інтервала інтегрування на підінтервали, де $q(x)$ стала (або лінійна, або квадратична).

Друге. Точність обчислення всіх власних значень є однаковою, а не такою як у асимптотичних методів: чим старше власне значення, тим вище точність.

Значної частини недоліків, притаманних вищенаведеним методам, позбавлений FD-метод у формі, запропонованій В. Л. Макаровим (1991) для задачі (0.1) і (0.2) [21]. Цей метод є рекурентним. На нульовій ітерації це є Pruess метод, а на кожній наступній розв'язується крайова задача для рівняння другого порядку з кусково-сталими коефіцієнтами і змінною правою частиною, яка будується через попередні ітераційні розв'язки. Була доведена наступна

Теорема 3. *Нехай* $q(x) \in Q^2[0,1]$, $\bar{q}(x) = [q(x_{i-1}) + q(x_i)]/2$, $x \in [x_{i-1}, x_i] \equiv h_i$, $i = 1, \ldots, N+1$, $h = \max_i h_i$, *тоді мають місце наступні оцінки точності FD-методу*

$$\left|\lambda_n(q(\cdot)) - \overset{m}{\lambda}_n(\bar{q}(\cdot))\right| \leqslant C_m h^{m+1} n^{-m}, \tag{0.14}$$

$$\left\|u_n(x, q(\cdot)) - \overset{m}{u}_n(x, \bar{q}(\cdot))\right\| \leqslant D_m (h/n)^{m+1}, \tag{0.15}$$

де C_m *і* D_m *— сталі, що не залежать від* h *та* n, $\lambda_n{}^m(\bar{q}(\cdot)) = \sum_{j=0}^{m} \lambda_n^{(j)}(\bar{q}(\cdot))$, $u_n{}^m(x, \bar{q}(\cdot)) = \sum_{j=0}^{m} u_n^{(j)}(x, \bar{q}(\cdot))$, m *— глибина рекурсії.*

Оцінки точності (0.14), (0.15) FD-методу мають єдину, але значну ваду: наявність в них невизначених сталих C_m і D_m.

1. FD-метод для задачі Штурма–Ліувілля

1.1. Умови Діріхле

В роботі [21] для розв'язку задачі Штурма–Ліувілля

$$\begin{gathered} u''(x) + [\lambda - q(x)]u(x) = 0, \qquad x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0 \end{gathered} \tag{1.1}$$

з кусково-гладким коефіцієнтом $q(x)$ був запропонований функціонально-дискретний метод (FD-метод). Метод дає можливість при фіксованому параметрі дискретизації N визначити наближення до всіх власних функцій і власних значень з точністю, що залежить від будь-якого ступеня $(Nn)^{-1}$ (див. теорему 1 з [21]). Тут $N+1$ дорівнює кількості сходинок у кусково-сталій функції $\bar{q}(x)$, якою замінюється функція $q(x)$ при переході від (1.1) до дискретно-неперервної апроксимуючої задачі, n — порядковый номер відповідного власного значення.

Суть FD-методу полягає у наступному. Задачу (1.1) "занурюємо" у більш загальну задачу

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + [\lambda - w(x,t)]\, u(x,t) = 0, \qquad x \in (0,1), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \end{gathered} \tag{1.2}$$

де

$$w(x,t) = \bar{q}(x) + t\,[q(x) - \bar{q}(x)],$$

t — параметр з $[0,1]$. Ясно, що при $t=1$ розв'язок задачі (1.2) співпадає з розв'язком задачі (1.1), тобто

$$\begin{gathered} \lambda_n(w(\cdot,1)) = \lambda_n(q(\cdot)), \\ n = 1,2,3,\ldots, \\ u_n(x, w(\cdot,1)) \equiv u_n(x, q(\cdot)). \end{gathered} \tag{1.3}$$

Позначення, використані у (1.3) підкреслюють, що власні значення (впорядковані за зростанням) та власні функції задач (1.1) та (1.2) є відповідно нелінійними функціоналами та нелінійними операторами від коефіцієнта $q(x)$ диференціального оператора.

Розкладемо $\lambda_n(w(\cdot,t))$ та $u_n(x, w(\cdot,t))$, як функції від t, в ряд Тейлора в околі точки $t=0$ із залишковим членом в інтегральній формі і покладемо $t=1$. Тоді будемо мати

$$\begin{aligned} \lambda_n(q(\cdot)) &= \overset{m}{\lambda_n}(\bar{q}(\cdot)) + R^n_{m+1}(\lambda) \\ &= \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} \frac{d^j \lambda_n(w(t,\cdot))}{dt^j}\bigg|_{t=0} + \frac{1}{m!}\int_0^1 (1-t)^m \frac{d^{m+1}\lambda_n(w(t,\cdot))}{dt^{m+1}}\,dt, \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} u_n(x, q(\cdot)) &= \overset{m}{u_n}(x, \bar{q}(\cdot)) + R^n_{m+1}(u,x) \\ &= \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j u_n(x, w(t,\cdot))}{\partial t^j}\bigg|_{t=0} + \frac{1}{m!}\int_0^1 (1-t)^m \frac{\partial^{m+1} u_n(x, w(t,\cdot))}{\partial t^{m+1}}\,dt. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Помітимо, що ${\lambda_n}^m\left(\bar{q}\left(\cdot\right)\right)$ і ${u_n}^m\left(x,\bar{q}\left(\cdot\right)\right)$ є нічим іншим, як відрізки рядів типу Вольтерра для функціонала $\lambda_n\left(q\left(\cdot\right)\right)$ та відповідно для оператора $u_n\left(x,q\left(\cdot\right)\right)$ (див. [21]). Визначення членів рядів (1.4) і (1.5) реалізується рекурентно, відповідно наведеній нижче процедурі. Введемо позначення

$$u_n^{(j)}(x)=\frac{1}{j!}\frac{\partial^j u_n\left(x,w\left(t,\cdot\right)\right)}{\partial t^j}\bigg|_{t=0},\qquad \lambda_n^{(j)}=\frac{1}{j!}\frac{d^j\lambda_n\left(w\left(t,\cdot\right)\right)}{dt^j}\bigg|_{t=0}. \tag{1.6}$$

Тоді матимемо

$$\begin{cases}\dfrac{d^2u_n^{(j+1)}(x)}{dx^2}+\left[\lambda_n^{(0)}-\bar{q}(x)\right]u_n^{(j+1)}(x)=-\displaystyle\sum_{s=0}^{j}\lambda_n^{(j+1-s)}u_n^{(s)}(x)+\left[q(x)-\bar{q}(x)\right]u_n^{(j)}(x)\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\equiv -F_n^{(j+1)}(x),\qquad x\in(0,1)\\ u_n^{(j+1)}(0)=u_n^{(j+1)}(1)=0,\end{cases}$$

$$j=0,1,\ldots, \tag{1.7}$$

$$\lambda_n^{(j+1)}=-\int_0^1 u_n^{(0)}(x)\left\{\sum_{s=1}^{j}\lambda_n^{(j+1-s)}u_n^{(s)}(x)-\left[q(x)-\bar{q}(x)\right]u_n^{(j)}(x)\right\}dx. \tag{1.8}$$

Початкова умова для рекурентного процесу (1.7)–(1.8) задається як розв'язок задачі

$$\begin{gathered}\frac{d^2u_n^{(0)}(x)}{dx^2}+\left[\lambda_n^{(0)}-\bar{q}(x)\right]u_n^{(0)}(x)=0,\qquad x\in(0,1),\\ u_n^{(0)}(0)=u_n^{(0)}(1)=0,\\ \left\|u_n^{(0)}\right\|_0=\left[\int_0^1\left(u_n^{(0)}(x)\right)^2dx\right]^{1/2}=1,\end{gathered} \tag{1.9}$$

з кусково-сталим коефіцієнтом $\bar{q}(x)$. Задачу (1.9) далі будемо називати базовою для FD-методу. Наближення розв'язку задачі (1.1) розв'язком задачі (1.9) відомо в сучасній західній літературі як метод Прусса (Pruess method) (див. [10]).

Нехай $Q^r[0,1]$ — клас функцій, що мають скінченну кількість точок розриву $0<\eta_1<\eta_2<\cdots<\eta_l<1$, а на відрізках неперервності $[\eta_{i-1},\eta_i]$, $i=1,\ldots,l+1$, $\eta_0=0$, $\eta_{l+1}=1$ мають неперервні похідні до r-го порядку, r — невід'ємне ціле число. Введемо нерівномірну сітку

$$\hat{\omega}=\left\{x_i\colon 0<x_1<x_2<\cdots<x_N<1, h_i=x_i-x_{i-1}>0,\right.\\ \left.\sum_{i=1}^{N+1}h_i=1, x_{N+1}=1, x_0=0\right\},$$

причому так, щоб $\rho=\{\eta_i\colon i=1,\ldots,l\}\subset\hat{\omega}$ та введемо позначення

$$h=\max_{1\le i\le N+1}h_i. \tag{1.10}$$

В [21] з використанням умови нормування

$$\int_0^1 u_n^2\left(x,w\left(t,\cdot\right)\right)dx=1$$

була доведена

Теорема 1. *Нехай* $q(x) \in Q^2[0,1]$, $\bar{q}(x) = [q(x_{i-1}) + q(x_i)]/2$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, N+1$, *тоді будуть мати місце наступні оцінки точності FD-методу*

$$\left\| \lambda_n(q(\cdot)) - \overset{m}{\lambda}_n(\bar{q}(\cdot)) \right\| \le C_m \min\left\{ h^{m+1} n^{-m}, h^{2m+2} n \right\} \le C_m h^{m+1} n^{-m}, \tag{1.11}$$

$$\left\| u_n(x, q(\cdot)) - \overset{m}{u}_n(x, \bar{q}(\cdot)) \right\| \le D_m \min\left\{ \left(\frac{h}{n}\right)^{m+1}, h^{2m+2} \right\} \le D_m \left(\frac{h}{n}\right)^{m+1}, \tag{1.12}$$

де C_m і D_m — сталі, що не залежать від h та n (h N^{-1}).

Зауваження 1. При $m = 0$ з 1.4 і 1.2 маємо

$$\lambda_n(q(\cdot)) - \lambda_n^{(0)}(\bar{q}(\cdot)) = \int_0^1 \frac{d\lambda_n(w(\cdot,t))}{dt}\, dt = \int_0^1 \int_0^1 [q(x) - \bar{q}(x)]\, u_n^2(x, \omega(\cdot,t))\, dx\, dt,$$

і разом з оцінкою (1.11) випливає оцінка

$$\left| \lambda_n(q(\cdot)) - \lambda_n^{(0)}(\bar{q}(\cdot)) \right| \le \|q - \bar{q}\|_\infty,$$

що має місце для всіх $q(x) \in Q^{(0)}[0,1]$.

Цілком зрозуміло, що якщо побудовані дві такі кусково-постійні функції $\bar{q}_1(x)$ та $\bar{q}_2(x)$, що

$$\bar{q}_1(x) \le q(x) \le \bar{q}_2(x),$$

то буде мати місце наступна вилка

$$\lambda_n^{(0)}(\bar{q}_1(\cdot)) \le \lambda_n(q(\cdot)) \le \lambda_n^{(0)}(\bar{q}_2(\cdot)), \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Ця ідея була використана в [7], [60] для більш загальної задачі Штурма–Ліувілля.

Метою даного підрозділу є визначення умов, при яких FD-метод має експоненційну швидкість збіжності, встановлення явних оцінок його точності, з яких випливають двосторонні оцінки для точних власних значень та оцінки залишкових членів класичних асимптотичних формул.

Для формулювання основного результату даної роботи введемо позначення

$$\begin{gathered} M_n = \max\left\{ \left(\lambda_n^{(0)} - \lambda_{n-1}^{(0)}\right)^{-1}, \left(\lambda_{n+1}^{(0)} - \lambda_n^{(0)}\right)^{-1} \right\}, \qquad n \ge 2, \\ M_1 = \left(\lambda_2^{(0)} - \lambda_1^{(0)}\right)^{-1}, \end{gathered} \tag{1.13}$$

$$r_n = 4\|q - \bar{q}\|_\infty M_n \tag{1.14}$$

та послідовність $\{g_j\}_{j=0}^\infty$, що визначається рекурентним співвідношенням

$$g_{j+1} = \sum_{s=0}^{j} g_s g_{j-s}, \qquad j = 0, 1, \dots,\ g_0 = 1. \tag{1.15}$$

Тут $\|v\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |v(x)|$.

Основним результатом підрозділу є

Теорема 2. *Нехай*

$$\int_0^1 u_n^{(0)}(x) u_n^{(j)}(x)\, dx = \delta_{0j}, \qquad j = 0, 1, \dots, \tag{1.16}$$

та виконана умова

$$r_n < 1.$$

Тоді розв'язок задачі (1.1) *подається у вигляді рядів*

$$\begin{aligned} u_n(x, q(\cdot)) &= \sum_{j=0}^{\infty} u_n^{(j)}(x, \bar{q}(\cdot)), \\ \lambda_n(q(\cdot)) &= \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_n^{(j)}(\bar{q}(\cdot)), \end{aligned} \tag{1.17}$$

які збігаються не повільніше ніж геометрична прогресія із знаменником r_n, *причому мають місце явні оцінки*

$$\left|\lambda_n(q(\cdot)) - \overset{m}{\underset{n}{\lambda}}(\bar{q}(\cdot))\right| \leq \|q - \bar{q}\|_\infty \frac{r_n^m}{1 - r_n} \alpha_m, \tag{1.18}$$

$$\left\|u_n(x, q(\cdot)) - \overset{m}{\underset{n}{u}}(x, \bar{q}(\cdot))\right\|_0 \leq \frac{r_n^{m+1}}{1 - r_n} \alpha_{m+1}, \tag{1.19}$$

де

$$\alpha_j = 2\frac{(2j-1)!!}{(2j+2)!!} \leq \frac{1}{(j+1)\sqrt{\pi j}}.$$

Помітимо, що з (1.18) (1.19) відразу отримуються двосторонні оцінки точності. Вони мають апріорно–апостеріорний характер, оскільки вимагають знання константи M_n. У випадку $N = 0$, $\bar{q}(x) \equiv \mathrm{const}$ для M_n маємо явний вираз: $M_n = (\pi^2(2n-1))^{-1}$ і оцінки (1.18), (1.19) стають явними апріорними, що буде використано у прикладі 1.

Наслідок 1. *Покладемо в* (1.7)–(1.9) $\bar{q}(x) \equiv 0$, *тоді за умовою*

$$r_n^0 = \frac{4\|q\|_\infty}{\pi^2(2n-1)} < 1$$

розв'язок задачі (1.1) *подається у вигляді рядів*

$$u_n(x, q(\cdot)) = \sum_{j=0}^{\infty} u_n^{(j)}(x, 0), \qquad \lambda_n(q(\cdot)) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_n^{(j)}(0), \tag{1.20}$$

які збігаються із швидкістю геометричної прогресії зі знаменником r_n^0, *причому мають місце наступні оцінки*

$$\left|\lambda_n(q(\cdot)) - \overset{m}{\lambda}_n(0)\right| \leq \|q\|_\infty \frac{(r_n^0)^m}{1 - r_n^0} \alpha_m,$$

$$\left\|u_n(x, q(\cdot)) - \overset{m}{u}_n(x, 0)\right\|_0 \leq \frac{(r_n^0)^{m+1}}{1 - r_n^0} \alpha_{m+1}.$$

Помітимо, що в даному випадку ряди (1.20) при достатньо гладкій функції $q(x)$ є класичними асимптотичними рядами (див., наприклад, [62]). Для випадка $q(x) \in Q^0[0,1]$ будемо мати [21]

$$\begin{aligned} \lambda_n(q(\cdot)) = (n\pi)^2 &+ \int_0^1 (1 - \cos 2n\pi z_1) q(z_1)\, dz_1 \\ &+ \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \int_0^1 \sin n\pi z_1 \sin n\pi z_2 q(z_1) q(z_2) \\ &\quad \times \left[(z_1 + z_2 - 1)\sin n\pi(z_1 + z_2) - (|z_1 - z_2| - 1)\sin n\pi|z_1 - z_2|\right] dz_1\, dz_2 \\ &+ R_3^n(\lambda), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u_n(x,q(\cdot)) = \sqrt{2}\sin n\pi x \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}n\pi}\int_0^1 q(z)\sin(n\pi z) \\
&\qquad \times \left[(z+x-1)\sin n\pi(z+x) - (|z-x|-1)\sin n\pi\,|z-x|\right] dz \\
&+ R_2^n(u;x),
\end{aligned}
$$

де

$$
|R_3^n(\lambda)| \le \|q\|_\infty \frac{\left(r_n^0\right)^2}{1-r_n^0} 0.125 = O\left(\frac{1}{n^2}\right),
$$

$$
|R_2^n(u;x)| \le \frac{\left(r_n^0\right)^2}{1-r_n^0} 0.125 = O\left(\frac{1}{n^2}\right).
$$

Наведені тут оцінки залишкових членів спираються на (1.18), (1.19) та уточнюють відповідні оцінки з [21].

Доведення теореми 2. Розв'язок крайової задачі (1.6), (1.7), (1.8) можна подати у вигляді

$$
u_n^{(j+1)}(x) = -\sum_{\substack{p=1\\ p\neq n}}^{\infty} \frac{\left(F_n^{j+1}, u_p^{(0)}\right)}{\lambda_p^{(0)} - \lambda_n^{(0)}} u_p^{(0)}(x),
$$

звідки випливає оцінка

$$
\left\|u_n^{(j+1)}\right\|_0 \leqslant M_n \left\|F_n^{j+1}\right\|_0, \tag{1.21}
$$

яку за допомогою нерівності

$$
\begin{aligned}
\left\|F_n^{j+1}\right\|_0^2 &= \left\|\sum_{p=1}^{j} \lambda_n^{(j+1-p)} u_n^{(p)} - (q-\bar{q})\,u_n^{(j)}\right\|_0^2 - \left[\lambda_n^{(j+1)}\right]^2 \\
&\leqslant \left\|\sum_{p=1}^{j} \lambda_n^{(j+1-p)} u_n^{(p)} - (q-\bar{q})\,u_n^{(j)}\right\|_0^2 \leqslant \|q-\bar{q}\|_\infty^2 \left(\sum_{p=0}^{j} \left\|u_n^{(j-p)}\right\|_0 \left\|u_n^{(p)}\right\|_0\right)^2
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

можна подати у вигляді

$$
\left\|u_n^{(j+1)}\right\|_0 \leqslant \bar{r}_n \left\{\sum_{s=0}^{j} \left\|u_n^{(j-s)}\right\|_0 \left\|u_n^{(s)}\right\|_0\right\}, \tag{1.23}
$$

де $\bar{r}_n = \|q-\bar{q}\|_\infty M_n$.

Використовуючи введене позначення (1.15), з (1.23) отримуємо

$$
\left\|u_n^{(j+1)}\right\|_0 \leqslant \bar{r}_n^{j+1} g_{j+1}. \tag{1.24}
$$

Для оцінки g_j, $j = 0,\ldots,\infty$, нам знадобиться допоміжне твердження (див. [68], стор. 210–212).

Лема 1. *Для членів послідовності* $\{g_j\}_{j=0}^{\infty}$, *які визначаються рекурентним співвідношенням* (1.15), *має місце рівність*

$$
g_j = 4^j 2\frac{(2j-1)!!}{(2j+2)!!}, \qquad j = 0,1,\ldots. \tag{1.25}
$$

З урахуванням (1.25), нерівність (1.24) набуває вигляду

$$
\left\|u_n^{(j+1)}\right\|_0 \leqslant (4\bar{r}_n)^{j+1}\alpha_{j+1} = r_n^{j+1}\alpha_{j+1}. \tag{1.26}
$$

Оскільки ми вимагаємо виконання умови (1.16), то формула (1.8) спрощується, а саме:

$$\lambda_n^{(j+1)} = \int_0^1 [q(x) - \bar{q}(x)]\, u_n^{(j)}(x) u_n^{(0)}(x)\, dx. \tag{1.27}$$

З (1.27), (1.26) випливає оцінка

$$\left|\lambda_n^{(j+1)}\right| \leqslant \|q - \bar{q}\|_\infty \left\|u_n^{(j)}\right\|_0 \leqslant \|q - \bar{q}\|_\infty r_n^j \alpha_j. \tag{1.28}$$

Доведемо, що $\lim_{m\to\infty} u_n{}^m(x) = u_n(x)$ та $\lim_{m\to\infty} \lambda_n{}^m = \lambda_n$.

Перетворимо задачі (1.7), (1.9) до вигляду

$$\begin{gathered}
\frac{d^2\, u_n{}^m(x)}{dx^2} + \left[\lambda_n^{(0)} - \bar{q}(x)\right] \overset{m}{u}_n(x) \\
= -\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{j} \lambda_n^{(j+1-s)} u_n^{(s)}(x) + [q(x) - \bar{q}(x)] \overset{m-1}{u_n}(x), \qquad x \in (0,1), \\
\overset{m}{u}_n(0) = \overset{m}{u}_n(1) = 0,
\end{gathered}$$

який одержується сумуванням обох частин рівняння (1.7) по j від 0 до $m-1$ і додавання до результату рівняння (1.9). Або

$$\begin{gathered}
\frac{d^2\, u_n{}^m(x)}{dx^2} + \left[\overset{m}{\lambda}_n - q(x)\right] \overset{m}{u}_n(x) \\
= -\sum_{s=0}^{m} \left(\sum_{j=m+1}^{m+s} \lambda_n^{(j-s)}\right) u_n^{(s)}(x) + [q(x) - \bar{q}(x)]\, u_n^{(m)}(x), \\
\overset{m}{u}_n(0) = \overset{m}{u}_n(1) = 0,
\end{gathered} \tag{1.29}$$

де було використано наступне перетворення

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{j} \lambda_n^{(j+1-s)} u_n^{(s)}(x) + \lambda_n^{(0)} \sum_{s=0}^{m} u_n^{(s)}(x) = \sum_{s=0}^{m-1} \left(\sum_{j=s}^{m-1} \lambda_n^{(j+1-s)}\right) u_n^s(x) + \lambda_n^{(0)} \sum_{s=0}^{m} u_n^{(s)}(x) \\
&= \sum_{s=0}^{m} \left(\sum_{j=s}^{m} \lambda_n^{(j-s)}\right) u_n^s(x) = \overset{m}{\lambda}_n \overset{m}{u}_n(x) - \sum_{s=0}^{m-1} \left(\sum_{j=m+1}^{m+s} \lambda_n^{(j-s)}\right) u_n^s(x).
\end{aligned}$$

Для правої частини останнього рівняння буде мати місце оцінка

$$\begin{aligned}
&\left\| -\sum_{s=1}^{m} \sum_{j=m+1}^{m+s} \lambda_n^{(j-s)} u_n^{(s)}(x) + [q(x) - \bar{q}(x)]\, u_n^{(m)}(x) \right\| \\
&\leqslant \sum_{s=1}^{m} \sum_{j=m+1}^{m+s} \left|\lambda_n^{(j-s)}\right| \left\|u_n^{(s)}\right\| + \|q - \bar{q}\|_\infty \left\|u_n^{(m)}\right\| \\
&\leqslant \left\{ \sum_{s=1}^{m} \sum_{j=m+1}^{m+s} \left\|u_n^{(j-s-1)}\right\| \left\|u_n^{(s)}\right\| + \left\|u_n^{(m)}\right\| \right\} \|q - \bar{q}\|_\infty \\
&\leqslant \left\{ \sum_{s=1}^{m} \sum_{j=m+1}^{m+s} r_n^{j-s-1} \alpha_{j-s-1} r_n^s \alpha_s + r_n^m \alpha_m \right\} \|q - \bar{q}\|_\infty \\
&= r_n^m \|q - \bar{q}\|_\infty \left\{ \sum_{s=1}^{m} \sum_{j=m+1}^{m+s} r_n^{j-s-1} \alpha_{j-s-1} \alpha_s + \alpha_m \right\},
\end{aligned}$$

звідки випливає, що вона буде прямувати до нуля, коли $m \to \infty$. З (1.7), (1.21), (1.26) та (1.28) одержуємо

$$\begin{aligned}\left\|\frac{d^2 u_n^{(j+1)}}{dx^2}\right\| &\leqslant \left\|\lambda_n^{(0)} - \bar{q}\right\|_\infty \left\|u_n^{(j+1)}\right\| + \left\|F_n^{(j+1)}\right\| \\ &\leqslant \left\|\lambda_n^{(0)} - \bar{q}\right\|_\infty r_n^{j+1}\alpha_{j+1} + \|q-\bar{q}\|_\infty \sum_{p=0}^{j}\left\|u_n^{(j-p)}\right\|\left\|u_n^{(p)}\right\| \\ &\leqslant \left\|\lambda_n^{(0)} - \bar{q}\right\|_\infty r_n^{j+1}\alpha_{j+1} + \|q-\bar{q}\|_\infty r_n^j \sum_{p=0}^{j}\alpha_{j-p}\alpha_p \leqslant c r_n^{j-1},\end{aligned}$$

де стала c не залежить від j і n. Тоді, з точки зору сильної збіжності в просторі $L_2(0,1)$, будемо мати (див. теорему 5, стор. 141 [69])

$$\lim_{m\to\infty}\frac{d^2\, u_n{}^m(x)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\lim_{m\to\infty}\overset{m}{u}_n(x).$$

Це дає змогу перейти в задачі (1.29) до границі, коли $m \to \infty$. Будемо мати

$$\frac{d^2\bar{u}_n(x)}{dx^2} + \left[\bar{\lambda}_n - q(x)\right]\bar{u}_n(x) = 0, \qquad x \in (0,1),$$
$$\bar{u}_n(0) = \bar{u}_n(1) = 0,$$

де через $\bar{u}_n(x)$ і $\bar{\lambda}_n$ позначимо

$$\lim_{m\to\infty}\overset{m}{u}_n(x) = \bar{u}_n(x), \qquad \lim_{m\to\infty}\overset{m}{\lambda}_n = \bar{\lambda}_n.$$

Останнє і доводить, що $\bar{u}_n(x) = u_n(x)$ і $\bar{\lambda}_n = \lambda_n$.

Нарешті ми маємо

$$\left\|u_n(x,q(\cdot)) - \overset{m}{u}_n(x,\bar{q}(\cdot)\right\|_0 \leqslant \frac{r_n^{m+1}}{1-r_n}\alpha_{m+1},$$
$$\left|\lambda_n(q(\cdot)) - \overset{m}{\lambda}_n(\bar{q}(\cdot))\right| \leqslant \|q-\bar{q}\|_\infty \frac{r_n^m}{1-r_n}\alpha_m,$$

що і доводить теорему. □

Зауваження 2. Отримані результати без значних змін переносяться на крайові умови третього роду

$$u'(0) = \alpha u(0), \qquad u'(1) = -\beta u(1), \qquad \alpha,\beta \geqslant 0,$$

при цьому оцінки (1.18), (1.19) зберігаються. Це буде зроблено у підрозділі 2.2.

Алгоритмічна реалізація. Для розв'язання кожної із задач (1.7), (1.8) скористаємося технікою точних трьохточкових різницевих схем (т.т.р.с.) [37]. Вперше теорію т.т.р.с. для задачі Штурма–Ліувілля було розроблено В. Г. Приказчиковим (див. [13]). Схожий підхід для розв'язання задач на власні значення для диференціальних рівнянь другого порядку з кусково-сталими коефіцієнтами було запропоновано в [59]. Введемо позначення

$$t_i = \lambda_n(\bar{q}(\cdot)) - q_i, \qquad \nu_i = |t_i|^{1/2}, \qquad i = 1,\dots,N+1,$$

$$\mu_1(\nu_i x) = \begin{cases}\nu_i^{-1}\sinh(\nu_i x), & \text{якщо } t_i < 0,\\ x, & \text{якщо } t_i = 0,\\ \nu_i^{-1}\sin(\nu_i x), & \text{якщо } t_i > 0,\end{cases}$$

$$\mu_2(\nu_i x) = \begin{cases} \cosh(\nu_i x), & \text{якщо } t_i < 0, \\ 1, & \text{якщо } t_i = 0, \\ \cos(\nu_i x), & \text{якщо } t_i > 0, \end{cases}$$

де q_i — одне з можливих наближень $q(x)$ на інтервалі $[x_{i-1}, x_i]$, наприклад $q_i = q(x_{i-1/2})$.

Тут і далі при алгоритмічній реалізації FD-методу припускається, що вона здійснюється на ідеальному комп'ютері з нескінченною розрядною сіткою, тоб-то відсутня похибка заокруглення. Це припущення є природнім при використанні сучасних засобів комп'ютерної алгебри.

Тоді т.т.р.с. для (1.7) і (1.8) запишеться у вигляді

$$\left(a y_{\bar{x}}^{(j+1)}\right)_{\hat{x}} - d(x) y^{(j+1)} = -\varphi^{(j+1)}(x), \qquad x \in \hat{\omega},\ y^{(j+1)}(0) = y^{(j+1)}(1), \tag{1.30}$$

або у розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\hbar_i}\left[a(x_{i+1}) \frac{y^{(j+1)}(x_{i+1}) - y^{(j+1)}(x_i)}{h_{i+1}} - a(x_i) \frac{y^{(j+1)}(x_i) - y^{(j+1)}(x_{i-1})}{h_i}\right] \\ &\qquad - d(x_i) y^{(j+1)}(x_i) \\ &\quad = -\varphi^{(j+1)}(x_i), \qquad x_i \in \hat{\omega}, \\ &\qquad\qquad y^{(j+1)}(0) = y^{(j+1)}(1) = 0, \end{aligned}$$

де

$$a = a(x_i) = \left[\frac{1}{h_i}\mu_1(\nu_i h_i)\right]^{-1},$$

$$d = d(x_i) = \frac{1}{\hbar_i} \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\mu_2(\nu_{i+\alpha-1} h_{i+\alpha-1}) - 1}{\mu_1(\nu_{i+\alpha-1} h_{i+\alpha-1})}, \qquad \hbar_i = 0.5\,(h_{i+1} + h_i),$$

$$\begin{aligned} \varphi^{(j+1)} &= \varphi^{(j+1)}(x_i) \\ &= [\hbar_i \mu_1(\nu_i h_i)]^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mu_1(\nu_i(\xi - x_{i-1})) F_n^{(j+1)}(\xi)\, d\xi \\ &\qquad + [\hbar_i \mu_1(\nu_{i+1} h_{i+1})]^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mu_1(\nu_{i+1}(x_{i+1} - \xi)) F_n^{(j+1)}(\xi)\, d\xi. \end{aligned}$$

Той факт, що різницева схема (1.30) є точною, означає, що її розв'язок співпадає з проекцією на сітку $\hat{\omega}$ відповідного розв'язку задачі (1.7), (1.8), тобто $y^{(j+1)} = u_n^{(j+1)}(x)$, $x \in \hat{\omega}$.

Різницева схема (1.30) є виродженою, однак оскільки вона точна, то умова її розв'язності за рахунок вибору $\lambda_n^{(j+1)}$ відповідно до формули (1.8) буде автоматично виконана. Розв'язок її знаходимо наступним чином. Відкидаємо в (1.30) останнє рівняння і в передостанньому переносимо в праву частину член, що містить $y^{(j+1)}(x_N)$. Знаходимо розв'язок отриманої системи з трьохдіагональною (невиродженою) матрицею $y^{(j+1)}(x_i)$, $i = 1, \ldots, N-1$, що залежить від невідомого параметру $y^{(j+1)}(x_N)$. Визначення останнього здійснюється за допомогою умови нормування (1.16). Для цього спочатку виконуємо операцію поповнення сіткової проекції точного розв'язку задачі (1.7), (1.8)

$$\begin{aligned} u_n^{(j+1)}(x) &= \frac{\mu_1(\nu_i(x - x_{i-1}))}{\mu_1(\nu_i h_i)} y^{(j+1)}(x_i) + \frac{\mu_1(\nu_i(x_i - x))}{\mu_1(\nu_i h_i)} y^{(j+1)}(x_{i-1}) \\ &\quad + \int_{x_{i-1}}^{x_i} G^i(x,\xi) F_n^{(j+1)}(\xi)\, d\xi, \qquad x \in [x_{i-1}, x_i],\ i = 1, \ldots, N+1, \end{aligned} \tag{1.31}$$

де

$$G^i(x,\xi) = \mu_1^{-1}(\nu_i h_i) \begin{cases} \mu_1(\nu_i(x - x_{i-1}))\mu_1(\nu_i(x_i - \xi)), & x \leqslant \xi, \\ \mu_1(\nu_i(\xi - x_{i-1}))\mu_1(\nu_i(x_i - x)), & \xi \leqslant x, \end{cases}$$

після виконання якої записується умова нормування (1.16) через вираз (1.31). З (1.16) і визначається $y^{(j+1)}(x_N)$. В рекурентному процесі (1.30), (1.31) j пробігає значення від 0 до $m-1$. Початкові умови задаються наступним чином. Спочатку для $y^{(0)}(x)$ розв'язується задача (1.30) з $j=-1$, $\varphi^{(0)}(x) \equiv 0$, яка буде мати розв'язок за умови, що визначник $\Delta_N\left(\lambda^{(0)}(\bar q(\cdot)\right)$ трьохдіагональної матриці однорідної системи (1.30) дорівнює нулеві, тобто

$$\begin{aligned}&\Delta_N\left(\lambda^{(0)}(\bar q(\cdot)\right)\\ &= \begin{vmatrix} \left\{-\frac{1}{\hbar_1}\left(\frac{a(x_2)}{h_2}+\frac{a(x_1)}{h_1}\right)-d(x_1)\right\} & \frac{a(x_2)}{\hbar_1 h_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a(x_2)}{\hbar_2 h_2} & \left\{-\frac{1}{\hbar_2}\left(\frac{a(x_3)}{h_3}+\frac{a(x_2)}{h_2}\right)-d(x_2)\right\} & \frac{a(x_3)}{\hbar_2 h_3} & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & \frac{a(x_{N-1})}{\hbar_{N-1}h_{N-1}} & \left\{-\frac{1}{\hbar_{N-1}}\left(\frac{a(x_N)}{h_N}+\frac{a(x_{N-1})}{h_{N-1}}\right)-d(x_{N-1})\right\} & \frac{a(x_N)}{\hbar_{N-1}h_N} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{a(x_N)}{\hbar_N h_N} & \left\{-\frac{1}{\hbar_N}\left(\frac{a(x_{N+1})}{h_{N+1}}+\frac{a(x_N)}{h_N}\right)-d(x_N)\right\} \end{vmatrix}\\ &= 0.\end{aligned} \tag{1.32}$$

Для знаходження коренів рівняння (1.32) $\lambda_i^{(0)}(\bar q(\cdot))$, $i=1,2,\ldots$, спочатку отримуємо для кожного з них двосторонні оцінки, що можна зробити за допомогою зауваження 1. Отримуємо

$$(\pi n)^2 + q_{\min} = \lambda_n(q_{\min}) \leqslant \lambda_n^{(0)}(\bar q(\cdot)) \leqslant \lambda_n(q_{\max}) = (\pi n)^2 + q_{\max}, \tag{1.33}$$

де

$$q_{\min} = \min_{x\in[0,1]} q(x), \qquad q_{\max} = \max_{x\in[0,1]} q(x).$$

Знайдемо такий номер N_0, що для всіх $n \geqslant N_0$ відрізки (1.33), що містять корені рівняння (1.32), будуть неперетинаючимися, тобто буде виконуватися нерівність

$$(\pi n)^2 + q_{\max} \leqslant [\pi(n+1)]^2 + q_{\min}, \qquad n \geqslant N_0.$$

Звідси випливає, що

$$N_0 = \left\lceil \frac{q_{\max} - q_{\min} - \pi^2}{2\pi^2} \right\rceil,$$

де $\lceil a \rceil$ означає найменше ціле, що більше або дорівнює a.

Тоді для всіх $n \geqslant N_0$ корені рівняння (1.32) $\lambda_n^{(0)}(\bar q(\cdot))$ знаходимо методом ділення навпіл (методом бісекції). Розкриття визначника (1.32) при конкретному значенні $\tilde\lambda$ виконується відповідно до відомої рекурентної формули

$$\begin{gathered}\Delta_k\left(\tilde\lambda\right) = \left\{-\frac{1}{\hbar_k}\left[\frac{a(x_{k+1})}{h_{k+1}} + \frac{a(x_k)}{h_k}\right] - d(x_k)\right\}\Delta_{k-1}\left(\tilde\lambda\right) - \frac{a^2(x_k)}{\hbar_k h_k^2 \hbar_{k-1}}\Delta_{k-2}\left(\tilde\lambda\right),\\ k=1,2,\ldots,N, \qquad \Delta_{-1}\left(\tilde\lambda\right) = 0, \qquad \Delta_0\left(\tilde\lambda\right) = 1.\end{gathered} \tag{1.34}$$

Зауважимо, що з рекурентної формули (1.34) випливає одразу обгрунтованість способу, описаного вище, розв'язування різницевої схеми (1.30). Дійсно, покладемо у (1.34) $\tilde\lambda = \lambda_n^{(0)}$ і $k=N$. Тоді одержуємо, що

$$\Delta_{N-1}\left(\lambda_n^{(0)}\right) \neq 0.$$

Бо, припускаючи протилежне, з (1.34) прийшли б до ланцюга рівностей

$$\Delta_{N-1}\left(\lambda_n^{(0)}\right) = \Delta_{N-2}\left(\lambda_n^{(0)}\right) = \cdots = \Delta_0\left(\lambda_n^{(0)}\right) = 0.$$

Одержали протиріччя з тим, що $\Delta_0(\lambda_n^{(0)}) = 1$. Отже визначник системи, що одержується з (1.30) шляхом відкидання останнього рівняння і перенесенням в передостанньому рівнянні в праву частину виразу, що містить $y^{(j+1)}(x_N)$, буде відмінним від нуля.

Найпростіше знайти корені рівняння (1.32) у випадку, коли

$$q_{\max} - q_{\min} \leqslant 3\pi^2, \tag{1.35}$$

тому що тоді для всіх $n \geqslant 1$ границі коренів (1.33) будуть неперетинаючимися. Невиконання умови (1.35) призводить лише до технічних ускладнень, що не мають принципового характеру (деталізацію див. у [59]).

Знайшовши корені трансцендентного рівняння (1.32)

$$0 < \lambda_1^{(0)}(\bar{q}(\cdot)) < \lambda_2^{(0)}(\bar{q}(\cdot)) < \cdots < \lambda_n^{(0)}(\bar{q}(\cdot)) < \ldots,$$

підставляємо n-ий корень в (2.29) ($j = -1$, $\varphi^{(0)}(x) \equiv 0$) та доповнюємо отриману систему однорідних рівнянь умовою нормалізації (1.16)

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 \left[u_n^{(0)}(x, \bar{q}(\cdot))\right]^2 dx \\ &= \sum_{i=1}^{N+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\frac{\mu_1(\nu_i(x - x_{i-1}))}{\mu_1(\nu_i h_i)} y^{(0)}(x_i) + \frac{\mu_1(\nu_i(x_i - x))}{\mu_1(\nu_i h_i)} y^{(0)}(x_{i-1})\right]^2 dx. \end{aligned}$$

Розв'язок нової системи $y^{(0)}(x)$ знаходиться так же, як це було описано вище для $j \geqslant 0$. Після його знаходження, цей розв'язок $y^{(0)}(x)$, разом з $\lambda_n^{(0)}(\bar{q}(\cdot))$, утворює початкові умови рекурентного процесу, описаного вище.

Визначення 1. FD-метод для задачі (1.1) будемо називати точно реалізує-мим, якщо всі операції інтегрування в алгоритмі (1.7)–(1.9) здійснюються точно.

Має місце

Лема 2. *Для того, щоб FD-метод для задачі* (1.1) *був точно реалізуємим, достатньо, щоб функція* $q(x)$ *була кусково-поліноміальною або кусково-тригонометричною.*

Доведення очевидно.

Якщо FD-метод для задачі (1.1) не є точно реалізуємим, то для зберігання оцінок (1.18) і (1.19) замінюємо функцію $q(x)$ на функцію $\tilde{q}(x)$, яку будуємо наступним чином. Кожний з інтервалів $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, N+1$, ділимо на $[1/(4M_n)]$ рівновеликих інтервала, якщо n таке, що $4M_n < 1$, та залишаємо без змін в протилежному випадку. Між кожними двома вузлами нової сітки $\hat{\omega}(n)$ замінюємо $q(x)$ інтерполяційним поліномом m-го ступеню, який і позначуємо $\tilde{q}(x)$. Далі розв'язуємо FD-методом задачу (1.1) із заміною $q(x)$ на $\tilde{q}(x)$, котрий вже буде точно реалізуємим і якісний характер оцінок (1.18), (1.19) зберігається. Проілюструємо метод на наступних прикладах.

Приклад 1. Нехай $q(x) = \pi^2(1 - \cos(\pi x))$.

В даному випадку метод є точно реалізуємим. Результати розрахунків для $N = 1$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $q_1 = \frac{1}{2}$, $q_2 = \frac{3}{2}$ наведені в табл. 1.1.

Таблиця 1.1. Результати розрахунків за FD-методом для $q(x) = \pi^2(1 - \cos(\pi x))$.

Номер в.з. (n)	$\frac{\lambda_n^0}{\pi^2}$	$\frac{\lambda_n^1}{\pi^2}$	$\frac{\lambda_n^2}{\pi^2}$	$\frac{\lambda_n^3}{\pi^2}$	$\frac{\lambda_n^4}{\pi^2}$
1	1.93859169	1.92251551	1.91809704	1.91806100	1.91805813
2	5.04568495	5.04199553	5.03177991	5.03189728	5.03192257
3	9.99319814	10.00612909	10.01441867	10.01432461	-
4	17.01166208	17.00875718	17.00792008	17.00793764	-

Таблиця 1.2. Оцінки для перших чотирьох власних значень, $q(x) = \pi^2\,(1 - \cos(\pi x))$.

Номер власного значення	Нижня оцінка	Верхня оцінка
1	1.91805812	1.91805816
2	5.031913	5.031922
3	10.011665	10.014381
4	16.538364	17.035639

Про якість наближення перших чотирьох власних значень можна зробити висновок за табл. 1.2, взятою з [14, стор. 250].

Якщо взяти $\bar{q}(x) = \pi^2$, то, скориставшись наслідком 1 із заміною $q(x)$ на $q(x) - \bar{q}(x) = -\pi^2\cos\pi x$, будемо мати

$$\lambda_n^{(0)}(\bar{q}) = \pi^2\left(n^2+1\right), \qquad u_n^{(0)}(x,\bar{q}) = \sqrt{2}\sin\pi n x,$$

$$\lambda_n^{(1)}(\bar{q}) = 0, \qquad u_n^{(1)}(x,\bar{q}) = \frac{\sin\pi(n+1)x}{\sqrt{2}\,(2n+1)} - \frac{\sin\pi(n-1)x}{\sqrt{2}(2n-1)},$$

$$\lambda_n^{(2)}(\bar{q}) = \frac{\pi^2}{2\,(4n^2-1)},$$

$$u_n^{(2)}(x,\bar{q}) = \frac{\sin\pi(n+2)x}{4\sqrt{2}\,(2n+1)\,(2n+2)} + \frac{\sin\pi(n-2)x}{4\sqrt{2}(2n-1)(2n-2)}, \qquad \lambda_n^{(3)}(\bar{q}) = 0,$$

$$\begin{aligned} u_n^{(3)}(x,\bar{q}) &= \frac{1}{2\sqrt{2}(2n+1)^2}\left[\frac{1}{4n^2-1} + \frac{1}{8(n+1)}\right]\sin\pi(n+1)x \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{2}(2n-1)^2}\left[\frac{1}{4n^2-1} - \frac{1}{8(n-1)}\right]\sin\pi(n-1)x \\ &+ \frac{\sin\pi(n+3)x}{16\sqrt{2}(2n+1)(n+1)(6n+9)} - \frac{\sin\pi(n+3)x}{16\sqrt{2}(2n+1)(n+1)(6n+9)}, \end{aligned}$$

$$\lambda_n^{(4)}(\bar{q}) = \frac{\pi^2(20n^2+7)}{32(4n^2-1)^3(n^2-1)}.$$

Отже,

$$\frac{1}{\pi^2}\lambda_n\left(q\left(\cdot\right)\right) = n^2 + 1 + \frac{n}{2\,(4n^2-1)} + \frac{20n^2+7}{32\left(4n^2-1\right)^3\left(n^2-1\right)} + \frac{1}{\pi^2}R_5^n(\lambda),$$

де, відповідно до наслідку 1,

$$\frac{1}{m\pi^2\left|R_5^n(\lambda)\right| \leqslant \frac{14}{(2n-1)^3(2n-5)}}.$$

Звідси випливає оцінка

$$\left|\frac{1}{\pi^2}\lambda_n(q(\cdot)) - n^2 - 1 - \frac{1}{2(4n^2-1)} - \frac{20n^2+7}{32(4n^2-1)^3(n^2-1)}\right| \leqslant \frac{14}{(2n-1)^3\,(2n-5)},$$

$$n = 3, 4, \dots,$$

котра дає найпростішу можливість продовжити табл. 1.2. Більше того, наведена оцінка уточнює нижню та верхню границі для четвертого власного значення з [14]:

$$16.994334 \leqslant \frac{1}{\pi^2}\lambda_4\,(q\,(\cdot)) \leqslant 17.0215446.$$

Приклад 2. Нехай в задачі (1.1) $q(x) = \pi^2 e^{\pi x}$. В цьому випадку метод є точно реалізуємим. Результати розрахунків для $N = 1$, $x_1 = 0.8$, $q_1 = \frac{1}{2}\left(1 + e^{0.8\pi}\right)$, $q_2 = \frac{1}{2}\left(e^{0.8\pi} + e^{\pi}\right)$ подані у табл. 1.3. Оскільки в цьому випадку умова теореми 2 $r_n < 1$ виконується для $n > 1000$ то для порівняння в четвертій колонці таблиці наводяться результати з [10].

Якщо покласти $N = 0$, то при достатньо великому n можна взяти ${\lambda_n}^1(0)\pi^{-2}$ як наближення до $\lambda_n\pi^{-2}$, яке має вигляд

$$\frac{{\lambda_n}^1\,(0)}{\pi^2} = n^2 + \frac{1}{\pi}\,(e^{\pi} - 1) = n^2 + 7.047601\dots$$

та характеризує асимптотичну поведінку $\lambda_n\pi^{-2}$. З табл. 2.3 можна бачити вихід на асимптотику при зростанні n.

1.2. Умови третього роду

Нехай розглядається задача

$$\begin{aligned} u''(x) + [\lambda - q(x)]\,u(x) = 0, \qquad x \in (0,1), \\ u'(0) = \alpha u(0), \qquad u'\,(1) = -\beta u(1), \qquad \alpha, \beta \geqslant 0. \end{aligned} \tag{1.36}$$

З точки зору теорії FD-методу принципово, порівнюючи з випадком умов Діріхле, нічого не змінюється. Тому виклад будемо вести без доведень.

Згідно FD-методу, для знаходження членів рядів

$$u_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} u_n^{(j)}(x), \qquad \lambda_n = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_n^{(j)} \tag{1.37}$$

маємо наступну рекурентну систему

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 u_n^{(j+1)}(x)}{dx^2} + \left[\lambda_n^{(0)} - \bar{q}(x)\right] u_n^{(j+1)}(x) \\ &\quad = -\sum_{s=0}^{j} \lambda_n^{(j+1-s)} u_n^{(s)} + [q(x) - \bar{q}(x)] u_n^{(j)}(x) \equiv F_n^{(j+1)}(x), \qquad x \in (0,1), \\ &\frac{du_n^{(j+1)}(0)}{dx} = \alpha u_n^{(j+1)}(0), \qquad \frac{du_n^{(j+1)}(1)}{dx} = -\beta u_n^{(j+1)}(1), \qquad j = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{1.38}$$

ТАБЛИЦЯ 1.3. Результати розрахунків для $q(x) = \pi^2 e^{\pi x}$.

Номер в.з. (n)	$\frac{\lambda_n{}^0}{\pi^2}$	$\frac{\lambda_n{}^1}{\pi^2}$	$\frac{\lambda_n}{\pi^2}$(Pryce)
1	7.9235329168	5.74927162957	4.8966693800
2	11.6276625848	9.77545303263	10.045189893
3	17.6043941512	15.1409004557	16.019267250
4	25.4310372553	23.1662032022	23.266270940
5	34.494920344	32.2696978281	32.263707046
6	44.9428991294	43.229889154	43.220019641
7	57.7262032039	56.1268444388	56.181594023
8	72.9480498731	71.0925708125	71.152997537
9	90.1421266411	88.1034910387	88.132119192
10	109.036454774	107.1075478	107.11667614
11	129.815679554	128.094523291	128.10502127
12	152.788412801	151.072130248	151.09604375
13	177.942960741	176.066503867	176.08899681
14	205.039528236	203.071605593	203.08337104
15	233.952647272	232.074213731	232.07881198
16	264.81789293	263.068734187	263.07506796
17	297.818396016	296.059629319	296.07195674
18	332.93272765	331.057744727	331.06934398
19	369.993979431	368.060823881	368.06712902
20	408.923663598	407.062553446	407.06523527
21	449.827052348	448.059596338	448.06360365
22	492.834778464	491.054743814	491.06218803
23	537.92494633	536.053888672	536.06095197
24	584.968873335	583.055958044	583.05986641
25	633.910318641	632.057164377	632.05890789
26	684.835120614	683.055326993	683.05805737
27	737.844948401	736.052330313	736.05729923
28	792.919234235	791.051870641	791.05662058
29	849.953117775	848.053357166	848.05601068
30	908.90308909	907.054239751	907.05546058
31	969.841572225	968.052991363	968.05496270
32	1032.85183612	1031.05096224	1031.0545106
33	1097.91494194	1096.05068678	1096.0540990
34	1164.9423576	1163.05180592	1163.0537230
35	1233.89873671	1232.05247734	1232.0533787
36	1304.84670629	1303.05157536	1303.0530626

Номер в.з. (n)	$\frac{\lambda_n{}^0}{\pi^2}$	$\frac{\lambda_n{}^1}{\pi^2}$	$\frac{\lambda_n}{\pi^2}$(Pryce)
37	1377.85679576	1376.0501123	1376.0527718
38	1452.91162242	1451.04993422	1451.0525036
39	1529.93456148	1528.05080691	1528.0522557
40	1608.89591462	1607.05133392	1607.0520262
41	1689.85084448	1688.05065238	1688.0518132
42	1772.86053167	1771.04954833	1771.0516152
43	1857.90898764	1856.04942656	1856.0514309
44	1944.92866169	1943.05012596	1943.0512590
45	2033.89398107	2032.05055021	2032.0510984
46	2124.85423354	2123.05001741	2123.0509481
47	2217.86344431	2216.04915504	2216.0508073
48	2312.9068495	2311.0490681	2311.0506752
49	2409.92404571	2408.04964108	2408.0505511
50	2508.89259866	2507.04998973	2507.0504344
51	2609.85705218	2608.04956193	2608.0503245
...	...	...	...
100	10008.8881822	10007.0481983	
200	40008.8870789	40007.0477506	
300	90008.8868746	90007.0476677	
400	160008.886803	160007.047639	
500	250008.88677	250007.047625	
600	360008.886752	360007.047618	
700	490008.886741	490007.047614	
800	640008.886734	640007.047611	
900	810008.886729	810007.047609	
1000	1000008.88673	1000007.047607	

з базовою задачею

$$\begin{gathered}\frac{d^2u_n^{(0)}(x)}{dx^2} + \left[\lambda_n^{(0)} - \bar{q}(x)\right] u_n^{(0)}(x) = 0, \qquad x \in (0,1)\,, \\ \frac{du_n^{(0)}(0)}{dx} = \alpha u_n^{(0)}(0), \qquad \frac{du_n^{(0)}(1)}{dx} = -\beta u_n^{(0)}(1), \qquad \left\| u_n^{(0)} \right\| = 1,\end{gathered} \tag{1.39}$$

розв'язок якої береться за початкові дані для (1.38).

Використовуючи позначення з підрозділу 1.1, сформулюємо наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай використовується нормування*

$$\int_0^1 u_n^{(0)}(x) u_n^{(j)}(x)\, dx = \delta_{0j}, \qquad j = 0, 1, \ldots,$$

і виконується умова

$$r_n \equiv 4\left\|q - \bar{q}\right\|_\infty M_n < 1. \tag{1.40}$$

Тоді розв'язок задачі (1.36) *представляється у вигляді рядів* (1.37), *які збігаються не повільніше ніж геометрична прогресія із знаменником* r_n, *і мають місце наступні оцінки швидкості збіжності FD-методу*

$$\left|\lambda_n\left(q\left(\cdot\right)\right)-\overset{m}{\lambda}_n\left(\bar{q}\left(\cdot\right)\right)\right|\leqslant\left\|q-\bar{q}\right\|_{\infty}\frac{r_n^m}{1-r_n}\alpha_m, \tag{1.41}$$

$$\left\|u_n\left(x,q\left(\cdot\right)\right)-\overset{m}{u}_n\left(x,\bar{q}\left(\cdot\right)\right)\right\|\leqslant\frac{r_n^{m+1}}{1-r_n}\alpha_{m+1}. \tag{1.42}$$

Оцінки (1.41), (1.42) є апріорно-апостеріорними і лишаються такими ж на відміну від випадку умов Діріхле при $\bar{q}(x)\equiv 0$. Бо базова задача (1.39) при довільних α і β не має явного розв'язку.

При виконанні умови (1.40) ряди (1.37) стають узагальненими некласичними асимптотичними розвиненнями розв'язків задачі (1.36) для $q(x)\in Q^0\left[0,1\right]$. А якщо при $q(x)\equiv 0$ виконується умова

$$r_n^0\equiv 4\left\|q\right\|_{\infty}M_n<1, \tag{1.43}$$

то ряди (1.37) стають некласичними асимптотичними розвиненнями розв'язків задачі (1.36).

Наведемо три випадки, коли при $\bar{q}(x)\equiv 0$ оцінки

$$\left|\lambda_n\left(q\left(\cdot\right)\right)-\overset{m}{\lambda}_n(0)\right|\leqslant\left\|q\right\|_{\infty}\frac{\left(r_n^0\right)^m}{1-r_n^0}\alpha_m,$$

$$\left\|u_n\left(x,q\left(\cdot\right)\right)-\overset{m}{u}_n\left(x,0\right)\right\|\leqslant\frac{\left(r_n^0\right)^m}{1-r_n^0}\alpha_{m+1}$$

стають явними. Ясно, що останнє залежить від того, чи знаходяться у явному вигляді розв'язки базової задачі.

Це є наступні випадки.

1) $\alpha=\beta=0$ (умови Неймана). Для цього випадку розв'язками базової задачі будуть

$$\lambda_n^{(0)}=(n\pi)^2,\qquad u_n^{(0)}(x)=\sqrt{2}\cos n\pi x,\qquad n=1,2,\ldots,$$
$$\lambda_0^{(0)}=0,\qquad u_0^{(0)}(x)=1.$$

$$M_n=\frac{1}{\pi^2(2n-1)},\qquad r_n^0=\frac{4\left\|q\right\|_{\infty}}{\pi^2\left(2n-1\right)},\qquad M_0=\frac{1}{\pi^2},\qquad r_0^0=\frac{4\left\|q\right\|_{\infty}}{\pi^2},$$

2) $\alpha=0$ і $\beta=\infty$. Для цього випадку розв'язками базової задачі будуть

$$\lambda_n^{(0)}=\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2,\qquad u_n^{(0)}(x)=\sqrt{2}\cos\frac{2n-1}{2}\pi x,\qquad n=1,2,\ldots,$$

$$M_n=\frac{1}{2\pi^2\left(n-1\right)},\qquad r_n^0=\frac{2\left\|q\right\|_{\infty}}{\pi^2\left(n-1\right)},\qquad n=2,3,\ldots,\ M_1=\frac{1}{2\pi^2},\ r_1^0=\frac{2\left\|q\right\|_{\infty}}{\pi^2}.$$

3) $\alpha=\infty$ і $\beta=0$. В цьому випадку розв'язками базової задачі будуть

$$\lambda_n^{(0)}=\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2,\qquad u_n^{(0)}(x)=\sqrt{2}\sin\frac{2n-1}{2}\pi x,\qquad n=1,2,\ldots,$$

$$M_n=\frac{1}{2\pi^2\left(n-1\right)},\qquad r_n^0=\frac{2\left\|q\right\|_{\infty}}{\pi^2\left(n-1\right)},\qquad n=2,3,\ldots,\ M_1=\frac{1}{2\pi^2},\ r_1^0=\frac{2\left\|q\right\|_{\infty}}{\pi^2}.$$

Для реалізації рекурентного процесу (1.38), (1.39) застосуємо теорію точних трьохточкових різницевих схем О. А. Самарського, А. М. Тихонова, яка розповсюджена на задачі Штурма–Ліувілля В. Г. Приказчиковим.

На сітці $\hat{\omega}$ у внутрішніх точках з використанням позначень підрозділу 1.1 запишемо те ж саме різницеве рівняння

$$\left(ay_{\bar{x}}^{(j+1)}\right)_{\hat{x}} - d(x)y^{(j+1)}(x) = -\varphi^{(j+1)}(x), \qquad x \in \hat{\omega}. \tag{1.44}$$

Далі треба знайти точні різницеві аналоги крайових умов третього роду.

Запишемо розв'язок рівняння (1.38) на відрізку $[0, x_1]$, що задовольняє крайовій умові в точці $x = 0$:

$$\begin{aligned} u_n^{(j+1)}(x) = {} & \frac{\mu_1(\nu_1 x)}{\mu_1(\nu_1 h_1)} u_n^{(j+1)}(x_1) + \frac{\mu_1(\nu_1(x_1 - x))}{\mu_1(\nu_1 h_1)} \frac{u_n^{(j+1)}(x_1)}{\mu_2(\nu_1 h_1) + \alpha\mu_1(\nu_1 h_1)} \\ & + \int_0^{x_1} G^1(x,\xi) F_n^{(j+1)}(\xi)\, d\xi, \qquad x \in [0, x_1], \end{aligned} \tag{1.45}$$

де

$$G^1(x,\xi) = \frac{1}{\alpha + B} \begin{cases} \left[\frac{\alpha}{\nu_1}\sinh \nu_1 x + \cosh \nu_1 x\right] \left[\mu_2(\nu_1\xi) - B\mu_1(\nu_1\xi)\right], & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \left[-B\mu_1(\nu_1 x) + \mu_2(\nu_1 x)\right] \left[\cosh \nu_1\xi + \frac{\alpha}{\nu_1}\sinh \nu_1\xi\right], & \xi \leqslant x \leqslant x_1, \end{cases}$$

$$B = \frac{\mu_2(\nu_1 h_1)}{\mu_1(\nu_1 h_1)}.$$

З (1.45) в точці $x = 0$ одержуємо

$$u_n^{(j+1)}(0) = \frac{u_n^{(j+1)}(x_1)}{\mu_2(\nu_1 h_1) + \alpha\mu_1(\nu_1 h_1)} + \frac{1}{\alpha + B}\int_0^{x_1} \left[\mu_2(\nu_1\xi) - B\mu_1(\nu_1\xi)\right] F_n^{(j+1)}(\xi)\, d\xi. \tag{1.46}$$

Аналогічно записуємо розв'язок рівняння (1.38) на відрізку $[x_N, 1]$, що задовольняє крайовій умові в точці $x = 1$:

$$\begin{aligned} u_n^{(j+1)}(x) = {} & \frac{\mu_1(\nu_{N+1}(x - x_N))}{\mu_1(\nu_{N+1} h_{N+1})} \frac{u_n^{(j+1)}(x_N)}{\mu_2(\nu_{N+1} h_{N+1}) + \beta\mu_1(\nu_{N+1} h_{N+1})} \\ & + \frac{\mu_1(\nu_{N+1}(1 - x))}{\mu_1(\nu_{N+1} h_{N+1})} u_n^{(j+1)}(x_N) + \int_{x_N}^{1} G^{N+1}(x,\xi) F_n^{(j+1)}(\xi)\, d\xi, \\ & x \in [x_N, 1], \end{aligned} \tag{1.47}$$

де

$$\begin{aligned} G^{N+1}(x,\xi) = {} & \left[\frac{\mu_2(\nu_{N+1} h_{N+1})}{\mu_1(\nu_{N+1} h_{N+1})} + \beta\right]^{-1} \\ & \times \begin{cases} \left[\mu_2(\nu_{N+1}(1-x)) - \frac{\mu_2(\nu_{N+1} h_{N+1})}{\mu_1(\nu_{N+1} h_{N+1})}\mu_1(\nu_{N+1}(1-x))\right] \\ \quad \times \left[\mu_2(\nu_{N+1}(1-\xi)) + B\mu_1(\nu_{N+1}(1-\xi))\right], & x_N \leqslant x \leqslant \xi, \\ \left[\mu_2(\nu_{N+1}(1-x)) + \beta\mu_1(\nu_{N+1}(1-x))\right] \\ \quad \times \left[\mu_2(\nu_{N+1}(1-\xi)) - \frac{\mu_2(\nu_{N+1} h_{N+1})}{\mu_1(\nu_{N+1} h_{N+1})}\mu_1(\nu_{N+1}(1-\xi))\right], & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \end{aligned}$$

З (1.47) в точці $x = 1$ одержуємо

$$u_n^{(j+1)}(1) = \frac{u_n^{(j+1)}(x_N)}{\mu_2(\nu_{N+1}h_{N+1}) + \beta\mu_1(\nu_{N+1}h_{N+1})} + \left[\frac{\mu_2(\nu_{N+1}h_{N+1})}{\mu_1(\nu_{N+1}h_{N+1})} + \beta\right]^{-1} \times \int_{x_N}^{1}\left[\mu_2(\nu_{N+1}(1-\xi)) - \frac{\mu_2(\nu_{N+1}h_{N+1})}{\mu_1(\nu_{N+1}h_{N+1})}\mu_1(\nu_{N+1}(1-\xi))\right]F_n^{(j+1)}(\xi)\,d\xi. \tag{1.48}$$

Таким чином, в обчислювальній схемі в підрозділі 1.1 треба всюди $u_n^{(j+1)}(0)$ та $u_n^{(j+1)}(1)$ замінити їх виразами з (1.46) і (1.48).

Розглянемо деякі частинні випадки.

1) $\alpha = \beta = 0$, тоді

$$G^1(x,\xi) = \frac{\mu_1(\nu_1 h_1)}{\mu_2(\nu_1 h_1)}\begin{cases} \mu_2(\nu_1 x)\left[\mu_2(\nu_1\xi) - \frac{\mu_2(\nu_1 h_1)}{\mu_1(\nu_1 h_1)}\mu_1(\nu_1\xi)\right], & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \left[\mu_2(\nu_1 x) - \frac{\mu_2(\nu_1 h_1)}{\mu_1(\nu_1 h_1)}\mu_1(\nu_1 x)\right]\mu_2(\nu_1\xi), & \xi \leqslant x \leqslant x_1, \end{cases} \tag{1.49}$$

$$G^{N+1}(x,\xi) = \frac{\mu_1(\nu_{N+1}h_{N+1})}{\mu_2(\nu_{N+1}h_{N+1})} \times \begin{cases} \left[\mu_2(\nu_{N+1}(1-x)) - \frac{\mu_2(\nu_{N+1}h_{N+1})}{\mu_1(\nu_{N+1}h_{N+1})}\mu_1(\nu_{N+1}(1-x))\right] \\ \quad\times\mu_2(\nu_{N+1}(1-\xi)), & x_N \leqslant x \leqslant \xi, \\ \mu_2(\nu_{N+1}(1-x)) \\ \quad\times\left[\mu_2(\nu_{N+1}(1-\xi)) - \frac{\mu_2(\nu_{N+1}h_{N+1})}{\mu_1(\nu_{N+1}h_{N+1})}\mu_1(\nu_{N+1}(1-\xi))\right], & \xi \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{1.50}$$

$$u_n^{(j+1)}(0) = \frac{u_n^{(j+1)}(x_1)}{\mu_2(\nu_1 h_1)} + \frac{\mu_1(\nu_1 h_1)}{\mu_2(\nu_1 h_1)}\int_0^{x_1}\left[\mu_2(\nu_1\xi) - \frac{\mu_2(\nu_1 h_1)}{\mu_1(\nu_1 h_1)}\mu_1(\nu_1\xi)\right]F_n^{(j+1)}(\xi)\,d\xi, \tag{1.51}$$

$$u_n^{(j+1)}(1) = \frac{u_n^{(j+1)}(x_N)}{\mu_2(\nu_{N+1}h_{N+1})} + \frac{\mu_1(\nu_{N+1}h_{N+1})}{\mu_2(\nu_{N+1}h_{N+1})} \times \int_{x_N}^{1}\left[\mu_2(\nu_{N+1}(1-\xi)) - \frac{\mu_2(\nu_{N+1}h_{N+1})}{\mu_1(\nu_{N+1}h_{N+1})}\mu_1(\nu_{N+1}(1-\xi))\right]F_n^{(j+1)}(\xi)d\xi. \tag{1.52}$$

2) $\alpha = 0$, $\beta = \infty$. $G^1(x,\xi)$ визначається як в (1.49),

$$G^{N+1}(x,\xi) = \frac{\mu_1(\nu_{N+1}h_{N+1})}{\mu_2(\nu_{N+1}h_{N+1})} \times \begin{cases} \left[\mu_2(\nu_{N+1}(1-x)) - \frac{\mu_2(\nu_{N+1}h_{N+1})}{\mu_1(\nu_{N+1}h_{N+1})}\mu_1(\nu_{N+1}(1-x))\right] \\ \quad\times\mu_1(\nu_{N+1}(1-x)), & x_N \leqslant x \leqslant \xi, \\ \mu_1(\nu_{N+1}(1-x)) \\ \quad\times\left[\mu_2(\nu_{N+1}(1-x)) - \frac{\mu_2(\nu_{N+1}h_{N+1})}{\mu_1(\nu_{N+1}h_{N+1})}\mu_1(\nu_{N+1}(1-\xi))\right], & \xi \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

$u_n^{(j+1)}(0)$ визначається як в (1.51),

$$u_n^{(j+1)}(1) = 0.$$

3) $\alpha = \infty$, $\beta = 0$. $G^{N+1}(x,\xi)$ визначається як в (1.50),

$$G^1(x,\xi) = \frac{\mu_1(\nu_1 h_1)}{\mu_2(\nu_1 h_1)} \begin{cases} \mu_1(\nu_1 x)\left[\mu_2(\nu_1\xi) - \frac{\mu_2(\nu_1 h_1)}{\mu_1(\nu_1 h_1)}\mu_1(\nu_1\xi)\right], & 0 \leqslant x \leqslant \xi, 1 \\ \left[\mu_2(\nu_1 x) - \frac{\mu_2(\nu_1 h_1)}{\mu_1(\nu_1 h_1)}\mu_1(\nu_1 x)\right]\mu_1(\nu_1\xi), & \xi \leqslant x \leqslant x_1, \end{cases}$$

$$u_n^{(j+1)}(0) = 0,$$

$u_n^{(j+1)}(1)$ визначається як в (1.52).

Різницева схема (1.44), (1.46) і (1.48) є виродженою і у розгорнутому вигляді її можна переписати наступним чином

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\hbar_1 h_2} a(x_2) y^{(j+1)}(x_2) \\ &\quad - \left\{ \frac{a(x_2)}{\hbar_1 h_2} + \frac{a(x_1)}{\hbar_1 h_1}\left[1 - \frac{1}{\mu_2(\nu_1 h_1) + \alpha\mu_1(\nu_1 h_1)}\right] + d(x_1)\right\} y^{(j+1)}(x_1) \\ &\quad = -\varphi^{(j+1)}(x_1) - \frac{a(x_1)}{\hbar_1 h_1}\frac{1}{\alpha + B}\int_0^{x_1}\left[\mu_2(\nu_1\xi) - \beta\mu_1(\nu_1\xi)\right] F_n^{(j+1)}(\xi)d\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\hbar_i}\left[a(x_{i+1})\frac{y^{(j+1)}(x_{i+1}) - y^{(j+1)}(x_i)}{h_{i+1}} a(x_i)\frac{y^{(j+1)}(x_i) - y^{(j+1)}(x_{i-1})}{h_i}\right] - d(x_i)y^{(j+1)}(x_i) \\ &\quad = -\varphi^{(j+1)}(x_i), \qquad i = 2, \dots, N-1, \end{aligned} \tag{1.53}$$

$$\begin{aligned} &- \left\{ \frac{a(x_N)}{\hbar_N h_N} + \frac{a(x_{N+1})}{\hbar_N h_{N+1}}\left[1 - \frac{1}{\mu_2(\nu_{N+1}h_{N+1}) + \beta\mu_1(\nu_{N+1}h_{N+1})}\right] + d(x_N)\right\} y^{(j+1)}(x_N) \\ &\quad + \frac{1}{\hbar_N h_N} a(x_N) y^{(j+1)}(x_{N+1}) \\ &= -\varphi^{(j+1)}(x_N) \\ &\quad - \frac{a(x_{N+1})}{\hbar_N h_{N+1}}\left[\frac{\mu_2(\nu_{N+1}h_{N+1})}{\mu_1(\nu_{N+1}h_{N+1})} + \beta\right] \\ &\quad \times \int_{x_1}^1 \left[\mu_2(\nu_{N+1}(1-\xi)) - \frac{\mu_2(\nu_{N+1}h_{N+1})}{\mu_1(\nu_{N+1}h_{N+1})}\mu_1(\nu_{N+1}(1-\xi))\right] F_n^{(j+1)}(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Умови розв'язності системи (1.53) будуть автоматично виконуватись, оскільки $\lambda_n^{(j+1)}$ визначається з умов розв'язності крайової задачі (1.38)

$$\lambda_n^{(j+1)} = \int_0^1 \left[q(x) - \bar{q}(x)\right] u_n^{(j)}(x) u_n^{(0)}(x)\,dx,$$

а система (1.53) має своїм розв'язком (неєдиним) проекцію на сітку розв'язку задачі (1.38) $u_n^{(j+1)}(x)$, бо одержана вона з точної різницевої схеми.

Відкинемо у (1.53) останнє рівняння, а в передостанньому — член, що містить $y^{(j+1)}(x_N)$, перенесемо у праву частину. Одержимо систему з трьохдіагональною матрицею, розв'язок якої знаходимо методом прогонки (система невироджена, бо базова задача має прості власні значення $\lambda_n^{(0)}$). Цей розв'язок буде залежити від $y^{(j+1)}(x_N)$, як від параметра. Щоб його визначити, скористаємося умовою нормування

$$\int_0^1 u_n^{(j+1)}(x)\, u_n^{(0)}(x)\,dx = 0. \tag{1.54}$$

Але для цього треба спочатку відновити $u_n^{(j+1)}(x)$ за його проекцією на сітку $\hat{\omega}$. Це здійснюємо за правилом

$$\begin{aligned} u_n^{(j+1)}(x) = {} & \frac{\mu_1\left(\nu_i\left(x - x_{i-1}\right)\right)}{\mu_1\left(\nu_i h_i\right)} y^{(j+1)}\left(x_i\right) + \frac{\mu_1\left(\nu_i\left(x_i - x\right)\right)}{\mu_1\left(\nu_i h_i\right)} y^{(j+1)}\left(x_{i-1}\right) \\ & + \int_{x_{i-1}}^{x_i} G^i\left(x, \xi\right) F_n^{(j+1)}(\xi)\, d\xi, \qquad x \in \left[x_{i-1}, x_i\right],\ i = 1, \ldots, N+1, \end{aligned} \tag{1.55}$$

де

$$G^i\left(x, \xi\right) = \mu_1^{-1}\left(\nu_i h_i\right) \begin{cases} \mu_1\left(\nu_i\left(x - x_{i-1}\right)\right) \mu_1\left(\nu_i\left(x_i - \xi\right)\right), & x \leqslant \xi, \\ \mu_1\left(\nu_i\left(\xi - x_{i-1}\right)\right) \mu_1\left(\nu_i\left(x_i - x\right)\right), & \xi \leqslant x. \end{cases}$$

Підставляючи (1.55) у (1.54), одержуємо рівняння, з якого і визначаємо $y^{(j+1)}(x_N)$.

Початкові умови $\lambda_n^{(0)}$ і $y^{(0)}(x)$ для рекурентного процесу (1.44), (1.46), (1.48) $j = 0, \ldots, m-1$ визначаємо наступним чином. Розв'язуємо задачу (1.44), (1.46) і (1.48) при $j = -1$, $\varphi^{(0)}(x)$ і $F^{(0)}(\xi) \equiv 0$, яка буде мати розв'язок, якщо детермінант $\Delta_N(\lambda^{(0)}(\bar{q}(\cdot)))$ її трьохдіагональної матриці буде дорівнювати нулеві, тобто

$$\begin{aligned} & \Delta_N(\lambda^{(0)}(\bar{q}(\cdot))) \\ & = \begin{vmatrix} -\left\{\frac{a(x_2)}{\hbar_1 h_2} + \frac{a(x_1)}{\hbar_1 h_1}\left[1 - \frac{1}{\mu_2(\nu_1 h_1) + \alpha\mu_1(\nu_1 h_1)}\right] + d(x_1)\right\} & \frac{a(x_2)}{\hbar_1 h_2} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{a(x_2)}{\hbar_2 h_2} & -\left\{\frac{1}{\hbar_2}\left(\frac{a(x_3)}{h_3} + \frac{a(x_2)}{h_2}\right) + d(x_2)\right\} & \frac{a(x_3)}{\hbar_2 h_3} & 0 & \ldots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 \ \ldots \ 0 & \frac{a(x_{N-1})}{\hbar_{N-1} h_{N-1}} & -\left\{\frac{1}{\hbar_{N-1}}\left(\frac{a(x_N)}{h_N} + \frac{a(x_{N-1})}{h_{N-1}}\right) + d(x_{N-1})\right\} & \frac{a(x_N)}{\hbar_{N-1} h_N} & & \\ 0 \ \ldots \ 0 & 0 & \frac{a(x_N)}{\hbar_N h_N} & -\left\{\frac{a(x_N)}{\hbar_N h_N} + \frac{a(x_{N+1})}{\hbar_N h_{N+1}}\left[1 - \frac{1}{\mu_2(\nu_{N+1} h_{N+1}) + \beta\mu_1(\nu_{N+1} h_{N+1})}\right] + d(x_N)\right\} & & \end{vmatrix} \\ & = 0. \end{aligned} \tag{1.56}$$

Знаходження нулів визначника (1.56) можна здійснити з використанням двохсторонніх оцінок

$$(\pi n)^2 + q_{\min} \leqslant \lambda_n^{(0)}\left(\bar{q}\left(\cdot\right)\right) \leqslant (\pi n)^2 + q_{\max}, \tag{1.57}$$

де

$$q_{\min} = \min_{x \in [0,1]} q\left(x\right), \qquad q_{\max} = \max_{x \in [0,1]} q\left(x\right).$$

Знайдемо таке N_0, що для всіх $n \geqslant N_0$ інтервали (1.57), що містять нулі визначника (1.56), не перетинаються, тобто

$$(\pi n)^2 + q_{\max} \leqslant \left[\pi\left(n+1\right)\right]^2 + q_{\min}, \qquad n \geqslant N_0.$$

Звідси

$$N_0 = \left\lceil \frac{q_{\max} - q_{\min} - \pi^2}{2\pi^2} \right\rceil,$$

де $\lceil a \rceil$ означає найменше ціле, що більше або дорівнює a.

Тоді для всіх $n \geqslant N_0$ рівняння (1.56) розв'язується методом бісекції. Якщо ж

$$q_{\max} - q_{\min} \leqslant 3\pi^2, \tag{1.58}$$

то всі корені цього рівняння розділяються і знаходяться методом бісекції.

Якщо умова (1.58) не виконується, то перші $N-1$ нулів визначника $\Delta_N(\lambda^{(0)}(\bar{q}(\cdot)))$ можна знайти шляхом табулювання його значень з певним кроком і знаходження двох сусідніх значень аргумента, де змінюється знак. А далі знову застосовується бісекція.

Після того, як знайдені корені рівняння (1.56) $0 < \lambda_1^{(0)}(\bar{q}(\cdot)) < \lambda_2^{(0)}(\bar{q}(\cdot)) < \cdots < \lambda_n^{(0)}(\bar{q}(\cdot)) < \ldots$, підставляємо n-ий корень в однорідну систему (1.44), (1.46), (1.48) при $j = -1$, $\varphi^{(0)}(x) \equiv 0$ і $F_n^{(0)}(\xi) \equiv 0$ з умовою нормалізації

$$\begin{aligned}1 &= \int_0^1 \left[u_n^{(0)}(x, \bar{q}(\cdot))\right]^2 dx \\ &= \sum_{i=1}^{N+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\frac{\mu_1(\nu_i(x - x_{i-1}))}{\mu_1(\nu_i h_i)} y^{(0)}(x_i) + \frac{\mu_1(\nu_i(x_i - x))}{\mu_1(\nu_i h_i)} y^{(0)}(x_{i-1})\right]^2 dx.\end{aligned} \tag{1.59}$$

Сам розв'язок $y^{(0)}(x)$ знаходимо за попередньою стратегією. Відкидається останнє рівняння, а в передостанньому член, що містить $y^{(0)}(x_N)$, переноситься в праву частину. Одержану систему з трьохдіагональною матрицею розв'язуємо методом прогонки. Отриманий розв'язок буде залежити від $y^{(0)}(x_N)$ як від параметра. Останній знаходиться з (1.59).

Приклад 1. Розглядається задача з [51]

$$u''(x) + \left[\lambda - x^2\right] u(x) = 0, \qquad x \in (0,1), \; u(0) = u'(1) = 0.$$

При $\bar{q}(x) \equiv 0$ і $N = 0$ будемо мати

$$\begin{aligned}\lambda_n(q(\cdot)) &= \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 + \int_0^1 \left[1 - \cos(2n-1)\pi x\right] x^2\, dx + R_2^n(\lambda) = \overset{1}{\lambda}_n(0) + R_2^n(\lambda) \\ &= \pi^2 \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2(2n-1)^2} + R_2^n(\lambda),\end{aligned}$$

та

$$|R_2^n(\lambda)| \leqslant \frac{1}{\pi^2(2n-1)} \left[1 - \frac{4}{\pi^2(2n-1)}\right]^{-1} = \frac{1}{\pi^2(2n-1) - 4}.$$

Звідси випливає, що

$$\left|\lambda_{100}(q(\cdot)) - \overset{1}{\lambda}_{100}(0)\right| = \left|\lambda_{100}(q(\cdot)) - 97711.884300101\right| \leqslant 0.000510190734,$$

що є більш точним у порівнянні з відповідним результатом з [51], отриманим при $n = 180$ (кількість інтерполяційних вузлів). Більше того, тут дається явна оцінка точності.

1.3. FD-метод в абстрактній проблемі власних значень

Розглянемо в гильбертовому просторі H наступну задачу про власні значення

$$(A + B)u - \lambda u = \Theta, \tag{1.60}$$

де $A = A^* \geqslant 0$, $B = B^* \geqslant 0$, $\|B\| \leqslant K$, $\overline{D(A)} = H$ і Θ — нуль-елемент простору H, K — деяка додатна стала. Розв'язок задачі (1.60) шукаємо у вигляді

$$\lambda_n = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_n^{(j)} = \overset{m}{\lambda}_n + R_m(\lambda_n), \qquad u_n = \sum_{j=0}^{\infty} u_n^{(j)} = \overset{m}{u}_n + R_m(u_n), \tag{1.61}$$

де

$$\begin{aligned}\overset{m}{\lambda}_n &= \sum_{j=0}^{m} \lambda_n^{(j)}, \qquad R_m(\lambda_n) = \sum_{j=m+1}^{\infty} \lambda_n^{(j)}, \\ \overset{m}{u}_n &= \sum_{j=0}^{m} u_n^{(j)}, \qquad R_m(u_n) = \sum_{j=m+1}^{\infty} u_n^{(j)}, \qquad n = 1, 2, \ldots .\end{aligned} \tag{1.62}$$

Загальні члени рядів (1.61) визначаються як розв'язки послідовності рівнянь

$$
\begin{gathered}
\left(A+\bar{B}\right) u_n^{(j+1)}-\lambda_n^{(0)} u_n^{(j+1)}=-\left(B-\bar{B}\right) u_n^{(0)}+\sum_{p=0}^{j} \lambda_n^{(j+1-p)} u_n^{(p)} \equiv F_n^{(j)}, \\
\left(u_n^{(j+1)}, u_n^{(0)}\right)=0, \\
\lambda_n^{(j+1)}=\left(\left(B-\bar{B}\right) u_n^{(j+1)}, u_n^{(0)}\right), \qquad j=0,1, \ldots .
\end{gathered} \tag{1.63}
$$

Початкові значення $\lambda_n(0)$ і $u_n^{(0)}$ для рекурентного процесу (1.63) задаються як розв'язок базової задачі

$$
\left(A+\bar{B}\right) u_n^{(0)}-\lambda_n^{(0)}=0, \qquad \left(u_n^{(0)}, u_n^{(0)}\right)=1. \tag{1.64}
$$

Тут $\bar{B}=\bar{B}^* \geqslant 0$ — оператор, близький до оператора B і такий, що базова задача (1.64) є більш простою у порівнянні з вихідною задачею (1.60). Запропонований рекурентний процес (1.63), (1.64) є наслідком FD-методу, застосованого до (1.60) і розглянутого у [26, п. 1].

Має місце

Теорема 4. *Нехай A замкнений оператор, спектр задачі* (1.64) *дискретний*

$$
0 \leqslant \lambda_1^{(0)}<\lambda_2^{(0)}<\ldots,
$$

а відповідні власні функції $\left\{u_n^{(0)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ утворюють ортонормальний базис в H. Нехай виконана умова

$$
q_n=4 M_n\left\|B-\bar{B}\right\|<1,
$$

де

$$
M_n=\max \left\{\frac{1}{\lambda_n^{(0)}-\lambda_{n-1}^{(0)}}, \frac{1}{\lambda_{n+1}^{(0)}-\lambda_n^{(0)}}\right\}.
$$

Тоді ряди (1.62) *збігаються до відповідного розв'язку задачі* (1.60) *не повільніше, ніж геометрична прогресія із знаменником q_n, і мають місце оцінки*

$$
\begin{gathered}
\left\|u_n-\overset{m}{u}_n\right\| \leqslant \alpha_{m+1} \frac{q_n^{m+1}}{1-q_n}, \\
\left|\lambda_n-\overset{m}{\lambda}_n\right| \leqslant\left\|B-\bar{B}\right\| \alpha_m \frac{q_n^m}{1-q_n},
\end{gathered} \tag{1.65}
$$

тобто збіжність є експоненційною. Тут

$$
\alpha_m=2 \frac{(2 m-1)!!}{(2 m+2)!!}.
$$

Доведемо теорему 4. Використовуючи $\left(\lambda_n(0), u_n^{(0)}\right)$, розв'язки рівнянь (1.63) можна подати у вигляді

$$
u_n^{(j+1)}=-\sum_{\substack{p=1 \\ p \neq n}} \frac{\left(F_n^{(j)}, u_p^{(0)}\right)}{\lambda_n^{(0)}-\lambda_p^{(0)}} u_p^{(0)}.
$$

Звідки випливає оцінка

$$
\left\|u_n^{(j+1)}\right\| \leqslant M_n\left\|F_n^{(j)}\right\|,
$$

яку за допомогою нерівності

$$\begin{aligned}\left\|F_n^{(j)}\right\|^2 &= \left\|\sum_{p=1}^{j}\lambda_n^{(j+1-p)}u_n^{(p)} - \left(B-\bar{B}\right)u_n^{(j)}\right\|^2 - \left[\lambda_n^{(j+1)}\right]^2 \\ &\leqslant \left\|\sum_{p=1}^{j}\lambda_n^{(j+1-p)}u_n^{p} - \left(B-\bar{B}\right)u_n^{(j)}\right\|^2 \\ &\leqslant \left\|B-\bar{B}\right\|\left\{\sum_{p=1}^{j}\left\|u_n^{(j-p)}\right\|\left\|u_n^{(p)}\right\| + \left\|u_n^{(j)}\right\|\right\}^2\end{aligned}$$

можна подати у вигляді

$$\left\|u_n^{(j+1)}\right\| \leqslant M_n\left\|B-\bar{B}\right\|\sum_{p=0}^{j}\left\|u_n^{(j-p)}\right\|\left\|u_n^{(p)}\right\|.$$

Використавши лему 1 з підрозділу 1.1, отримуємо

$$\left\|u_n^{(j)}\right\| \leqslant q_n^j\alpha_j, \qquad \left|\lambda_n^{(j)}\right| \leqslant \left\|B-\bar{B}\right\| q_n^{j-1}\alpha_{j-1}. \tag{1.66}$$

Отже ряди (1.61) збігаються. Позначимо їх суми через $\hat{\lambda}_n$ та $\hat{u}_n$ відповідно. З (1.63) маємо

$$\left(A+\bar{B}\right)\overset{j+1}{u_n} = -\left(B-\bar{B}\right)\overset{j}{u_n} + \sum_{p=0}^{j+1}\sum_{k=0}^{p}\lambda_n^{(p+1-k)}u_n^{(k)}. \tag{1.67}$$

Розглянемо другий доданок в правій частині (1.67). З урахуванням (1.66) отримуємо

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{p=0}^{j+1}\sum_{k=0}^{p}\lambda_n^{(p+1-k)}u_n^{(k)} - \overset{j+1}{u_n}\overset{j+1}{\lambda_n}\right\| &= \left\|\sum_{p=1}^{j+1}u_n^{(p)}\sum_{k=j-p+2}^{j+1}\lambda_n^{(k)}\right\| \\ &\leqslant \sum_{p=1}^{j+1}q_n^p\alpha_p\sum_{k=j-p+2}^{j+1}\left\|B-\bar{B}\right\|q_n^{k-1}\alpha_{k-1} \\ &\leqslant \alpha_1^2\left\|B-\bar{B}\right\|\frac{q_n^{j-1}}{1-q_n}\left[j+1-q_n\frac{1-q_n^{j+1}}{1-q_n}\right].\end{aligned} \tag{1.68}$$

Перейдемо в (1.67) до границі, коли $j\to\infty$. Тоді, на основі умов теореми і (1.68), будемо мати

$$\left(A+B\right)\hat{u}_n - \hat{\lambda}_n\hat{u}_n = \Theta,$$

тобто $\hat{u}_n = u_n$ і $\hat{\lambda}_n = \lambda_n$. Доведення оцінок (1.65) очевидно. Теорема доведена повністю. □

Зауважимо, що подібний метод розв'язування задачі (1.60) було застосовано у роботі [27], але при більш жорстких обмеженнях на оператори A і B. Зокрема, у згаданій роботі вимагалося, щоб A був обмеженим оператором.

2. FD-метод для задачі Штурма–Ліувілля з періодичними умовами

2.1. Достатні умови збіжності некласичних асимптотичних розвинень ($\bar{q}(x)\equiv 0$)

Одержані конструктивні умови збіжності і оцінки похибки некласичних асимптотичних розвинень за порядковим номером для власних значень та власних функцій періодичної задачі Штурма–Ліувілля

$$
\begin{gathered}
u''(x) + [\lambda - q(x)]\, u(x) = 0, \qquad x \in (0,1), \\
u(0) = u(1), \qquad u'(0) = u'(1).
\end{gathered}
$$

Асимптотична поведінка за порядковим номером власних значень та власних фунцій λ_n, $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, періодичної задачі Штурма–Ліувілля

$$
\begin{gathered}
u''(x) + [\lambda - q(x)]u(x) = 0, \qquad x \in (0,a), \\
u(0) = u(a), \qquad u'(0) = u'(a)
\end{gathered} \tag{2.1}
$$

досить добре висвітлена в літературі. Так, зокрема, в [62, стор. 61] наведено наступне. Нехай $\lambda_0 < \lambda_2 \leqslant \mu_2 < \cdots < \lambda_n \leqslant \mu_n < \ldots$ — власні значення задачі (2.1), тоді при $a = \pi$ мають місце наступні асимптотичні розвинення

$$
\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + \ldots, \qquad \sqrt{\mu_n} = n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + \ldots, \tag{2.2}
$$

причому кількість точних членів у розвиненнях (2.2) залежить від порядка гладкості періодичної функції $q(x)$. Наведемо більш строге формулювання з [63, стор. 77]. Якщо $q(x) \in \widetilde{W}_2^n[0,\pi]$ і $\operatorname{Im} q(x) = 0$, тоді мають місце рівності

$$
\left.\begin{matrix} \sqrt{\lambda_k} \\ \sqrt{\mu_k} \end{matrix}\right\} = k + \sum_{1 \leqslant 2j+1 \leqslant n+2} a_{2j+1} \, (2k)^{-2j-1} \pm \left| e_n\,(2k) \right| (2k)^{-n-1} + \gamma_k^{\pm} k^{-n-2}, \tag{2.3}
$$

де

$$
\begin{gathered}
e_n\,(p) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} q^{(n)}(x) e^{-ipx} \, dx, \\
a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} q(x) \, dx, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty, \\
\sum_{k=0}^{\infty} \left|\gamma_k^{\pm}\right|^2 < \infty.
\end{gathered}
$$

Тут $\widetilde{W}_2^n[0,\pi]$ — підпростір простору Соболєва $W_2^n[0,\pi]$, що складається з функцій $f(x) \in W_2^n[0,\pi]$, які задовольняють періодичним крайовим умовам $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(\pi)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Якщо потенціал $q(x)$ нескінченно диференційований, тоді власні значення при $k \to \infty$ розкладаються в асимптотичні ряди:

$$
\left.\begin{matrix} \sqrt{\lambda_k} \\ \sqrt{\mu_k} \end{matrix}\right\} \cong k + \sum_{j=0}^{\infty} l_{2j+1} k^{-2j-1} \pm \sum_{j=1}^{\infty} l_{2j} k^{-2j}.
$$

Коефіцієнти цих асимптотичних рядів виражаються через $q(x)$ та визначники, складені з стовпчиків матриці граничних умов

$$
\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix}.
$$

Якщо $q(x) \in \widetilde{W}_2^n[0,\pi]$, тоді в рядах зберігаються члени, які спадають при $k \to \infty$ не швидше ніж k^{-n}, а залишок має порядок $o\left(k^{-n}\right)$ і, взагалі кажучи, не може бути розвинутий в асимптотичний ряд.

Перейдемо до опису структури розділу. Спочатку дамо наступне

Визначення 1. Некласичними асимптотичними розвиненнями для задачі Штурма–Ліувілля (2.1) будемо називати ряди

$$\lambda_n \cong \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_n^{(j)}, \qquad u_n(x) \cong \sum_{j=0}^{\infty} u_n^{(j)}(x), \tag{2.4}$$

загальні члени яких мають властивості

$$\left|\lambda_n^{(j)}\right| \leqslant c_1 \left(\frac{b}{n}\right)^{j-1}, \qquad \left\|u_n^{(j)}(x)\right\| \leqslant c_2 \left(\frac{b}{n}\right)^{j},$$

де c_1, c_2 і b — сталі, що не залежать від n та j.

Даний розділ в першому своєму підрозділі присвячений побудові за допомогою FD-методу некласичних асимптотичних розвинень для задачі (2.1) і встановленню достатньої умови, коли вони будуть експоненційно збіжними (ряд для $u_n(x)$ буде рівномірно збіжним). Ця умова має вигляд

$$\beta_n^0 \equiv \frac{\|q\|_\infty \left(3+\sqrt{8}\right)}{\pi n} < 1, \tag{2.5}$$

причому $\lambda_n^{(j)\pm}$ і $u_n^{(j)\pm}(x)$, що відповідають FD-методу, оцінюються наступним чином:

$$\left|\lambda_n^{(j)\pm}\right| \leqslant \beta_n^{j-1} \frac{1}{2} \frac{(2j-3)!!}{(2j)!!}, \qquad \left\|u_n^{(j)\pm}\right\| \leqslant \beta_n^{j} \frac{1}{2} \frac{(2j-3)!!}{(2j)!!},$$
$$j = 1, 2, \ldots, \qquad (-1)!! = 1, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Починаючи з одиниці кожному n тут відповідають дві пари розв'язків

$$\left(\lambda^{(j)-}, u_n^{(j)-}(x)\right), \qquad \left(\lambda^{(j)+}, u_n^{(j)+}(x)\right),$$

а для $n = 1, 2, \ldots$

$$\lambda_n^{(0)\pm} = (2\pi n)^2, \qquad u_n^{(0)-}(x) = \sqrt{2}\sin 2\pi n x, \qquad u_n^{(0)+}(x) = \sqrt{2}\cos 2\pi n x.$$

Порівнюючи з визначенням, маємо

$$b = \frac{\|q\|_\infty \left(3+\sqrt{8}\right)}{\pi}, \qquad c_1 = \frac{1}{2}, \qquad c_2 = \frac{1}{2}.$$

Якщо умова (2.5) не виконується, то вводиться

Визначення 2. Ряди (2.3) називаються узагальненими некласичними асимптотичними розвиненнями для власних значень та власних функцій задачі (2.1), якщо їх загальні члени задовільняють нерівностям

$$\left|\lambda_n^{(j)}\right| \leqslant c_1 \left(\frac{b\,\|q-\bar{q}\|_\infty}{n}\right)^{j-1}, \qquad \left\|u_n^{(j)}(x)\right\| \leqslant c_2 \left(\frac{b\,\|q-\bar{q}\|_\infty}{n}\right)^{j},$$

де $\bar{q}(x)$ — кусково-стала функція, що наближає $q(x)$, а c_1, c_2 і b — сталі, що не залежать від n та j.

Даний підрозділ присвячений знаходженню достатньої умови, яка забезпечує збіжність узагальнених некласичних асимптотичних розвинень для власних значень та власних функцій задачі (2.1). Ця умова знайдена у вигляді

$$\beta_n = 2\left(3+\sqrt{8}\right) M_n \|q-\bar{q}\|_\infty < 1,$$
$$M_n = \frac{1}{\pi n}\sqrt{1+\frac{1}{4\pi n}} \exp\left[\frac{\|q\|_\infty}{2(\pi n)^2}\left(1+\frac{1}{4\pi n}\right)\right].$$

Загальні члени рядів (2.4), що відповідають FD-методу, оцінюються наступним чином

$$
\begin{gathered}
\left|\lambda_n^{(j+1)}\right| \leqslant \|q-\bar{q}\|_\infty \beta_n^j \frac{1}{2}\frac{(2j-1)!!}{(2j+2)!!}\left(3+\sqrt{8}\right), \\
\left\|u_n^{(j+1)}\right\| \leqslant \beta_n^{j+1}\frac{1}{2}\frac{(2j-1)!!}{(2j+2)!!}, \\
j = 0, 1, \ldots,
\end{gathered} \tag{2.6}
$$

Порівнюючи з визначенням 2, маємо

$$
b = 2\left(3+\sqrt{8}\right)\|q-\bar{q}\|_\infty \frac{1}{\pi}\sqrt{1+\frac{1}{4\pi}}\exp\left[\frac{\|q\|_\infty}{2\pi^2}\left(1+\frac{1}{4\pi}\right)\right],
$$
$$
c_1 = \frac{3+\sqrt{8}}{2^2}\|q-\bar{q}\|_\infty, \qquad c_2 = \frac{1}{4}.
$$

Заключна частина другого підрозділу містить результати чисельних експериментів.

FD-метод для задачі (2.1) полягає у наступному. “Занурюємо” задачу (2.1) у більш загальну задачу

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + [\lambda - tq(x)]\,u(x,t) = 0, \qquad x \in (0,1), \\
u(0,t) = u(1,t), \qquad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(1,t)}{\partial x},
\end{gathered} \tag{2.7}
$$

де t — параметр з $[0,1]$. Цілком зрозуміло, що при $t = 1$ розв'язок задачі (2.7) співпадає з розв'язком задачі (2.1) при $a = 1$, тобто

$$
\lambda_n(t)\big|_{t=1} = \lambda_n, \qquad u_n(x,t)\big|_{t=1} = u_n(x), \qquad n = 1, 2, \ldots.
$$

Розкладемо $\lambda_n(t)$ та $u_n(x,t)$, як функції від t, у ряд Тейлора в околі точки $t = 0$ із залишковим членом в інтегральній формі і покладемо $t = 1$. Тоді будемо мати

$$
\lambda_n = \overset{m}{\lambda}_n + R_{m+1}^n(\lambda) = \sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j!}\frac{d^j\lambda_n(t)}{dt^j}\bigg|_{t=0} + \frac{1}{m!}\int_0^1 (1-t)^m\,\frac{d^{m+1}\lambda_n(t)}{dt^{m+1}}\,dt, \tag{2.8}
$$

$$
u_n(x) = \overset{m}{u}_n(x) + R_{m+1}^n(u,x) = \sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j!}\frac{\partial^j u_n(x,t)}{\partial t^j}\bigg|_{t=0}\frac{1}{m!}\int_0^1 (1-t)^m\,\frac{\partial^{m+1}u_n(x,t)}{\partial t^{m+1}}\,dt. \tag{2.9}
$$

Визначення членів рядів (2.8), (2.9) здійснюється рекурентно згідно схеми, що наводиться нижче. Введемо позначення

$$
u_n^{(j)}(x) = \frac{1}{j!}\frac{\partial^j u_n(x,t)}{\partial t^j}\bigg|_{t=0}, \qquad \lambda_n^{(j)} = \frac{1}{j!}\frac{d^j\lambda_n(t)}{dt^j}\bigg|_{t=0}.
$$

Тоді будемо мати: задача для початкових значень рекурентного процесу

$$
\begin{gathered}
\frac{d^2 u_n^{(0)}(x)}{dx^2} + \lambda_n^{(0)} u_n^{(0)}(x) = 0, \qquad x \in (0,1), \\
u_n^{(0)}(0) = u_n^{(0)}(1), \qquad \frac{du_n^{(0)}(0)}{\partial x} = \frac{du_n^{(0)}(1)}{\partial x},
\end{gathered} \tag{2.10}
$$

де

$$\lambda_n^{(0)} = (2\pi n)^2, \qquad u_n^{(0)}(x) = a_n^{(0)}\sqrt{2}\sin 2\pi nx + b_n^{(0)}\sqrt{2}\cos 2\pi nx,$$
$$\left[a_n^{(0)}\right]^2 + \left[b_n^{(0)}\right]^2 = 1, \qquad n = 1, 2, \dots, \tag{2.11}$$
$$\lambda_0^{(0)} = 0, \qquad u_0^{(0)}(x) = 1.$$

Рекурентний процес полягає у послідовному розв'язуванні задач

$$\frac{d^2 u_n^{(j+1)}(x)}{dx^2} + \lambda_n^{(0)} u_n^{(j+1)}(x)$$
$$= -\sum_{s=0}^{j} \lambda_n^{(j+1-s)} u_n^{(s)}(x) + q(x)\, u_n^{(j)}(x) \equiv -F_n^{(j+1)}(x), \qquad x \in (0,1), \tag{2.12}$$
$$u_n^{(j+1)}(0) = u_n^{(j+1)}(1), \qquad \frac{du_n^{(j+1)}(0)}{dx} = \frac{du_n^{(j+1)}(1)}{dx}, \qquad j = 0, 1, \dots .$$

Для того, щоб кожна з задач (2.12) мала розв'язок, необхідно, щоб

$$\int_0^1 F_n^{(j+1)}(\xi)\sqrt{2}\sin 2\pi n\xi\, d\xi = 0, \qquad \int_0^1 F_n^{(j+1)}(\xi)\sqrt{2}\cos 2\pi n\xi\, d\xi = 0, \tag{2.13}$$
$$j = 0, 1, \dots .$$

Спочатку розглянемо випадок

$$q(x) = q(1-x).$$

Покладемо

$$\lambda_{2n-1}^{(0)} = \lambda_{2n}^{(0)} = (2\pi n)^2,$$
$$u_{2n-1}^{(0)}(x) = \sqrt{2}\sin 2\pi nx, \qquad u_{2n}^{(0)}(x) = \sqrt{2}\cos 2\pi nx,$$
$$n = 1, 2, \dots,$$
$$\lambda_0^{(0)} = 0, \qquad u_0^{(0)}(x) = 1.$$

Оскільки функція $u_{2n-1}^{(0)}(x)$ є непарною відносно точки $x = \frac{1}{2}$, то і функція $F_{2n-1}^{(j+1)}(x)$ буде такою ж. Аналогічно, оскільки функція $u_{2n}^{(0)}(x)$ є парною відносно точки $x = \frac{1}{2}$, то і функція $F_{2n}^{(j+1)}(x)$ буде такою ж. Отже

$$\int_0^1 F_{2n-1}^{(j+1)}(x)\, u_{2n}^{(0)}(x)\, dx = 0, \qquad \int_0^1 F_{2n}^{(j+1)}(x) u_{2n-1}^{(0)}(x)\, dx = 0.$$

Тоді, якщо взяти умову нормування

$$\int_0^1 u_n^{(j)}(x)\, u_n^{(0)}(x)\, dx = \delta_{0j}, \qquad j = 0, 1, \dots,$$

і визначити $\lambda_{2n-1}^{(j+1)}$ і $\lambda_{2n}^{(j+1)}$ з співвідношень

$$\lambda_{2n-1}^{(j+1)} = \int_0^1 q(x)\, u_{2n-1}^{(j)}(x) u_{2n-1}^{(0)}(x)\, dx, \qquad \lambda_{2n}^{(j+1)} = \int_0^1 q(x) u_{2n}^{(j)}(x) u_{2n}^{(j)}(x)\, dx,$$

то будуть виконані всі умови розв'язності задач (2.12).

Запишемо розв'язки задач (2.12) у вигляді

$$u_{2n-1}^{(j+1)}(x) = - \sum_{\substack{p=0 \\ p\neq 2n-1,2n}}^{\infty} \frac{\left(F_{2n-1}^{(j+1)}, u_p^{(0)}\right)}{\lambda_p^{(0)} - \lambda_{2n-1}^{(0)}} u_p^{(0)}(x),$$

$$u_{2n}^{(j+1)}(x) = - \sum_{\substack{p=0 \\ p\neq 2n-1,2n}}^{\infty} \frac{\left(F_{2n}^{(j+1)}, u_p^{(0)}\right)}{\lambda_p^{(0)} - \lambda_{2n}^{(0)}} u_p^{(0)}(x), \qquad n = 1, 2 \ldots .$$

Далі ідуть такі ж міркування, як і у підрозділі 1.1, що доводить наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай $q(x) = q\,(1-x)$. Тоді, якщо виконується умова*

$$\bar{r}_n^{(0)} = \bar{r}_{2n-1}^{(0)} = \bar{r}_{2n}^{(0)} = \frac{\|q\|_\infty}{4\pi^2(2n-1)} < 1, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

то розв'язок задачі (2.1) *представляється у вигляді рядів* (2.8), (2.9), *які збігаються не повільніше ніж геометрична прогресія, і точність FD-методу оцінюється за наступними явними формулами*

$$\left|\lambda_n\left(q\left(\cdot\right)\right) - \overset{m}{\lambda}_n\left(q(0)\right)\right| \leqslant \|q\|_\infty \frac{\left(\bar{r}_n^{(0)}\right)^m}{1-\bar{r}_n^{(0)}} \alpha_m,$$

$$\left\|u_n\left(x, q\left(\cdot\right)\right) - \overset{m}{u}_n\left(x, 0\right)\right\| \leqslant \frac{\left(\bar{r}_n^{(0)}\right)^{m+1}}{1-\bar{r}_n^{(0)}} \alpha_{m+1}.$$

Нехай тепер функція $q(x)$ не є парною на відрізку $[0,1]$ відносно точки $x = \frac{1}{2}$. При виконанні умов (2.13) розв'язок задачі (2.1) можна взяти у вигляді

$$u_n^{(j)}(x) = \int_x^1 \frac{\sin 2\pi n\,(x-\xi)}{2\pi n} F_n^{(j)}(\xi)\, d\xi + a_n^{(j)} \sqrt{2} \sin 2\pi n x + b_n^{(j)} \sqrt{2} \cos 2\pi n x. \tag{2.14}$$

Одну з умов, з яких визначаються $a_n^{(j)}$ і $b_n^{(j)}$, візьмемо у вигляді

$$\left[a_n^{(j)}\right]^2 + \left[b_n^{(j)}\right]^2 = \int_0^1 \left[\int_x^1 \frac{\sin 2\pi n\,(x-\xi)}{2\pi n} F_n^{(j)}(\xi)\, d\xi\right]^2 dx. \tag{2.15}$$

Друга умова одержується з (2.13)

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \sqrt{2}\sin 2\pi n x \left[\lambda_n^{(1)} - q(x)\right] \left[a_n^{(j)}\sqrt{2}\sin 2\pi n x + b_n^{(j)}\sqrt{2}\cos 2\pi n x\right] dx \\
&\quad = -\int_0^1 \sqrt{2}\sin 2\pi n x \left[\lambda_n^{(1)} - q(x)\right] \int_x^1 \frac{\sin 2\pi n\,(x-\xi)}{2\pi n} F_n^{(j)}(\xi)\, d\xi\, dx \\
&\qquad - \int_0^1 \sqrt{2}\sin 2\pi n x \sum_{p=0}^{j-1} \lambda_n^{(j+1-p)} u_n^{(p)}(x)\, dx \\
&\quad \equiv c_n^{(j)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \sqrt{2}\cos 2\pi nx \left[\lambda_n^{(1)} - q(x)\right] \left[a_n^{(j)}\sqrt{2}\sin 2\pi nx + b_n^{(j)}\sqrt{2}\cos 2\pi nx\right] dx \\
&\quad = -\int_0^1 \sqrt{2}\cos 2\pi nx \left[\lambda_n^{(1)} - q(x)\right] \int_x^1 \frac{\sin 2\pi n\,(x-\xi)}{2\pi n} F_n^{(j)}(\xi)\,d\xi\,dx \\
&\qquad - \int_0^1 \sqrt{2}\cos 2\pi nx \sum_{p=0}^{j-1} \lambda_n^{(j+1-p)} u_n^{(p)}(x)\,dx \\
&\quad \equiv d_n^{(j)}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

або

$$\begin{gathered}
\left[\lambda_n^{(1)} - \int_0^1 (1-\cos 4\pi nx)\,q(x)\,dx\right] a_n^{(j)} - \int_0^1 \sin 4\pi nx q(x)\,dx b_n^{(j)} = c_n^{(j)}, \\
-\int_0^1 \sin 4\pi nx q(x)\,dx a_n^{(j)} + \left[\lambda_n^{(1)} - \int_0^1 (1+\cos 4\pi nx)\,q(x)\,dx\right] b_n^{(j)} = d_n^{(j)}, \\
j = 0,1,\ldots, c_n^{(0)} = 0, \qquad d_n^{(0)} = 0.
\end{gathered} \tag{2.17}$$

З (2.17) при $j=0$ маємо

$$\begin{gathered}
\left[\lambda_n^{(1)} - \int_0^1 (1-\cos 4\pi nx)\,q(x)\,dx\right] a_n^{(0)} - \int_0^1 q(x)\sin 4\pi nx\,dx b_n^{(0)} = 0, \\
-\int_0^1 q(x)\sin 4\pi nx\,dx a_n^{(0)} + \left[\lambda_n^{(1)} - \int_0^1 (1+\cos 4\pi nx)\,q(x)\,dx\right] b_n^{(0)} = 0.
\end{gathered} \tag{2.18}$$

Однорідна система рівнянь (2.18) буде мати нетривіальний розв'язок, якщо

$$\lambda_n^{(1)\pm} = \int_0^1 q(x)\;dx \pm \left\{\left[\int_0^1 q(x)\cos 4\pi nx\,dx\right]^2 + \left[\int_0^1 q(x)\sin 4\pi nx\,dx\right]^2\right\}^{1/2}. \tag{2.19}$$

Тоді з урахуванням (2.11) одержуємо

$$\begin{gathered}
\left[a_n^{(0)}\right]^2 = \frac{1}{2}\frac{\left(\int_0^1 q(x)\sin 4\pi nx\,dx\right)^2}{\pm q_n\left(\int_0^1 q(x)\cos 4\pi nx\,dx \pm q_n\right)}, \\
b_n^{(0)} = \frac{\lambda_n^{(1)\pm} - \int_0^1 q(x)\,(1-\cos 4\pi nx)\;dx}{\int_0^1 q(x)\sin 4\pi nx\,dx} a_n^{(0)}, \\
q_n^2 = \left(\int_0^1 q(x)\cos 4\pi nx\,dx\right)^2 + \left(\int_0^1 q(x)\sin 4\pi nx\,dx\right)^2.
\end{gathered}$$

Вироджена система (2.17) буде мати розв'язок при умові

$$a_n^{(0)}c_n^{(j)} + b_n^{(0)}d_n^{(j)} = 0 \tag{2.20}$$

або

$$\begin{aligned}
\lambda_n^{(j+1)\pm} = &-\sum_{s=1}^{j-1} \lambda_n^{(j+1-s)\pm} \int_0^1 u_n^{(0)\pm}(x) u_n^{(s)\pm}(x)\;dx \\
&- \int_0^1 u_n^{(0)\pm}(x)\left[\lambda_n^{(1)\pm} - q(x)\right] \int_x^1 \frac{\sin 2\pi n\,(x-\xi)}{2\pi n} F_n^{(j)}(\xi)\,d\xi\,dx.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Тоді з (2.17) і (2.15) однозначно визначаються $a_n^{(j)}$ і $b_n^{(j)}$ і можна переходити у рекурентному процесі до $j+1$.

З (2.13) легко одержати, що

$$\int_0^1 F_n^{(j+1)}(\xi)\, u_n^{(0)\pm}(\xi) d\xi = 0$$

або

$$\lambda_n^{(j+1)\pm} = -\sum_{s=1}^{j-1} \int_0^1 u_n^{(0)\pm}(\xi)\, u_n^{(s)\pm}(\xi) d\xi \lambda_n^{(j+1-s)\pm} + \int_0^1 u_n^{(0)\pm}(\xi) \left[-\lambda_n^{(1)\pm} + q(\xi)\right] u_n^{(j)\pm}(\xi)\, d\xi. \tag{2.22}$$

Перейдемо до оцінок $\lambda_n^{(j)\pm}$ і $u_n^{(j)\pm}$. Маємо

$$\left|\lambda_n^{(j+1)\pm}\right| \leqslant \sum_{s=1}^{j} \left|\lambda_n^{(j+1-s)\pm}\right| \left\|u_n^{(s)\pm}\right\| + \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |q(x)| \left\|u_n^{(j)\pm}\right\|, \tag{2.23}$$

і

$$\begin{aligned}
\left\|u_n^{(j+1)\pm}\right\| &\leqslant 2\left\{\int_0^1 \left[\int_x^1 \frac{\sin 2\pi n(x-\xi)}{2\pi n} F_n^{(j+1)}(\xi)\right]^2 dx\right\}^{1/2} \\
&\leqslant \frac{1}{\pi n}\left\{\int_0^1 \int_x^1 \sin^2 2\pi n(x-\xi)\, d\xi\, dx\right\}^{1/2} \left\|F_n^{(j+1)}\right\| \\
&= \frac{1}{\pi n}\left\{\frac{1}{2}\int_0^1 \int_x^1 [1-\cos 4\pi n(x-\xi)]\, d\xi\, dx\right\}^{1/2} \left\|F_n^{(j+1)}\right\| \\
&= \frac{1}{\pi n}\left\{\frac{1}{4} - \frac{1}{8\pi n}\int_0^1 \sin 4\pi n(1-x)\, dx\right\}^{1/2} \left\|F_n^{(j+1)}\right\| \\
&= \frac{1}{\pi n}\left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{8\pi n}\int_0^1 \sin 4\pi n x\, dx\right\}^{1/2} \left\|F_n^{(j+1)}\right\| = \frac{1}{2\pi n}\left\|F_n^{(j+1)}\right\| \\
&\leqslant \left\{\sum_{s=0}^{j} \left|\lambda_n^{(j+1-s)\pm}\right| \left\|u_n^{(s)\pm}\right\| + \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |q(x)| \left\|u_n^{(j)\pm}\right\|\right\} \frac{1}{2\pi n}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Таким чином треба розв'язати систему нерівностей (2.23) і (2.24). Далі

$$\left|\lambda_n^{(j+1)\pm}\right| \leqslant \sum_{s=1}^{j} \left|\lambda_n^{(j+1-s)\pm}\right| \left\|u_n^{(s)\pm}\right\| + \|q\|_\infty \left\|u_n^{(j)\pm}\right\|, \qquad j = 1, 2, \ldots,$$

$$\left\|u_n^{(j+1)\pm}\right\| \leqslant \frac{1}{2\pi n}\left\{\sum_{s=0}^{j} \left|\lambda_n^{(j+1-s)\pm}\right| \left\|u_n^{(s)\pm}\right\| + \|q\|_\infty \left\|u_n^{(j)\pm}\right\|\right\}, \qquad j = 0, 1, \ldots,$$

$$\left\|u_n^{(0)\pm}\right\| = 1.$$

Зробимо заміну

$$\left|\lambda_n^{(j)\pm}\right| = \frac{\|q\|_\infty^j}{(2\pi n)^{j-1}} \Lambda_n^{(j)}, \qquad \left\|u_n^{(j)\pm}\right\| = \frac{\|q\|_\infty^j}{(2\pi n)^j} U_n^{(j)}. \tag{2.25}$$

Тоді система (2.23), (2.24) набуде вигляду

$$\Lambda_n^{(j+1)} \leqslant \sum_{s=1}^{j} \Lambda_n^{(j+1-s)} U_n^{(s)} + U_n^{(j)},$$

$$U_n^{(j+1)} \leqslant \sum_{s=0}^{j} \Lambda_n^{(j+1-s)} U_n^{(s)} + U_n^{(j)}, \qquad j = 0, 1, \ldots,$$

$$U_n^{(0)} = 1.$$

Розв'язок останньої мажорується зверху розв'язками наступної системи рівняннь

$$\bar{\Lambda}_n^{(j+1)} = \sum_{s=1}^{j} \bar{\Lambda}_n^{(j+1-s)} \bar{U}_n^{(s)} + \bar{U}_n^{(j)},$$

$$\bar{U}_n^{(j+1)} = \sum_{s=0}^{j} \bar{\Lambda}_n^{(j+1-s)} \bar{U}_n^{(s)} + \bar{U}_n^{(j)}, \qquad j = 0, 1, \ldots, \tag{2.26}$$

$$\bar{U}_n^{(0)} = 1.$$

Для розв'язання системи (2.26) скористаємося методом твірних функцій. Нехай

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j \bar{U}_n^{(j)}, \qquad g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j \bar{\Lambda}_n^{(j+1)},$$

тоді з (2.26) отримуємо

$$f(z) - 1 = zf(z)\left[g(z) + 1\right],$$

$$g(z) = \left[f(z) - 1\right] g(z) + f(z).$$

Звідси

$$f(z) = \frac{2g(z)}{1 + g(z)} = 2 - \frac{2}{1 + g(z)}, \tag{2.27}$$

і для знаходження $g(z)$ одержуємо рівняння

$$2zg^2(z) - (-2z + 1)\, g(z) + 1 = 0,$$

що дає

$$g(z) = \frac{-2z + 1 - \sqrt{(-2z + 1)^2 - 8z}}{4z}, \qquad g(0) = 1. \tag{2.28}$$

На основі (2.27) і (2.28) знаходимо $f(z)$:

$$f(z) = \frac{3}{2} - z - \frac{1}{2}\sqrt{(2z - 3)^2 - 8} = \frac{3}{2} - z - \left[-z + \frac{3 + \sqrt{8}}{2}\right]^{1/2} \left[-z + \frac{3 - \sqrt{8}}{2}\right]^{1/2}. \tag{2.29}$$

Будемо розглядати z з проміжку $[0, (3 - \sqrt{8})/2)$, тоді буде мати місце співвідношення

$$f(z) = \frac{3}{2} - z - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{2z}{3 + \sqrt{8}} - \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(2p-3)!!}{(2p)!!} \left(\frac{2z}{3 + \sqrt{8}}\right)^p\right]$$

$$\times \left[1 - \frac{1}{2}\frac{2z}{3 - \sqrt{8}} - \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(2p-3)!!}{(2p)!!} \left(\frac{2z}{3 - \sqrt{8}}\right)^p\right].$$

Звідси

$$\begin{aligned}\bar{U}_n^{(j)} &= 2^{j-1}\left\{\frac{(2j-3)!!}{(2j)!!}\left[\left(3+\sqrt{8}\right)^j+(3-\sqrt{8})^j\right]\right.\\&\left.\qquad-\sum_{p=1}^{j-1}\frac{(2p-3)!!}{(2p)!!}\frac{(2j-2p-3)!!}{(2j-2p)!!}\left(3-\sqrt{8}\right)^p\left(3+\sqrt{8}\right)^{j-p}\right\}\\&=2^{j-1}\frac{(2j-3)!!}{(2j)!!}\left(3+\sqrt{8}\right)^j\\&\quad\times\left\{1+\frac{1}{\left(3+\sqrt{8}\right)^{2j}}\right.\\&\left.\qquad-\frac{(2j)!!}{(2j-3)!!}\sum_{p=1}^{j-1}\frac{(2p-3)!!}{(2p)!!}\frac{(2j-2p-3)!!}{(2j-2p)!!}\frac{1}{\left(3+\sqrt{8}\right)^{2p}}\right\},\end{aligned}\tag{2.30}$$

$$(-1)!!=1,\qquad j=2,3,\ldots,$$

і

$$0<\bar{U}_n^{(j)}<2^{j-1}\frac{(2j-3)!!}{(2j)!!}\left(3+\sqrt{8}\right)^j.\tag{2.31}$$

Аналогічно,

$$\begin{aligned}g(z)=\frac{1}{4z}\Bigg\{-2z+1-&\left[1-\frac{1}{2}\frac{2z}{3+\sqrt{8}}-\sum_{p=2}^{\infty}\frac{(2p-3)!!}{(2p)!!}\left(\frac{2z}{3+\sqrt{8}}\right)^p\right]\\&\times\left[1-\frac{1}{2}\frac{2z}{3-\sqrt{8}}-\sum_{p=2}^{\infty}\frac{(2p-3)!!}{(2p)!!}\left(\frac{2z}{3-\sqrt{8}}\right)^p\right]\Bigg\}.\end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned}\bar{\Lambda}_n^{(j+1)} &= 2^{j-1}\left\{\frac{(2j-1)!!}{(2j+2)!!}\left[\left(3+\sqrt{8}\right)^{j+1}+\left(3-\sqrt{8}\right)^{j+1}\right]\right.\\&\left.\qquad-\sum_{p=1}^{j}\frac{(2p-3)!!}{(2p)!!}\frac{(2j-2p-1)!!}{(2j-2p+2)!!}\left(3-\sqrt{8}\right)^p\left(3+\sqrt{8}\right)^{j+1-p}\right\}\\&=2^{j-1}\frac{(2j-1)!!}{(2j+2)!!}\left(3+\sqrt{8}\right)^{j+1}\\&\quad\times\left\{1+\frac{1}{\left(3+\sqrt{8}\right)^{2j+2}}\right.\\&\left.\qquad-\frac{(2j+2)!!}{(2j-1)!!}\sum_{p=1}^{j}\frac{(2p-3)!!}{(2p)!!}\frac{(2j-2p-1)!!}{(2j-2p+2)!!}\frac{1}{\left(3+\sqrt{8}\right)^{2p}}\right\},\end{aligned}\tag{2.32}$$

$$j=1,2,\ldots$$

Звідси

$$0<\bar{\Lambda}_n^{(j+1)}<2^{j-1}\frac{(2j-1)!!}{(2j+2)!!}\left(3+\sqrt{8}\right)^{j+1}.\tag{2.33}$$

Таким чином доведена

Лема 1. *Нехай послідовності gl*$\{\bar{\Lambda}_n^{(j+1)}\}_{j=0}^{\infty}$ *і* $\{\bar{U}_n^{(j)}\}_{j=0}^{\infty}$ *визначаються рекурентно за допомогою нелінійної системи* (2.26). *Тоді члени цих послідовностей визначаються формулами*

$$\bar{U}_n^{(j)} = 2^{j-1}\frac{(2j-3)!!}{(2j)!!}(3+\sqrt{8})^j$$
$$\times\left\{1+\frac{1}{\left(3+\sqrt{8}\right)^{2j}}-\frac{(2j)!!}{(2j-3)!!}\sum_{p=1}^{j-1}\frac{(2p-3)!!}{(2p)!!}\frac{(2j-2p-3)!!}{(2j-2p)!!}\frac{1}{\left(3+\sqrt{8}\right)^{2p}}\right\},$$
$$j=2,3,\ldots,\qquad \bar{U}_n^{(0)}=1,\qquad \bar{U}_n^{(1)}=2,$$

$$\bar{\Lambda}_n^{(j+1)} = 2^{j-1}\frac{(2j-1)!!}{(2j+2)!!}\left(3+\sqrt{8}\right)^{j+1}$$
$$\times\left\{1+\frac{1}{\left(3+\sqrt{8}\right)^{2j+2}}-\frac{(2j+2)!!}{(2j-1)!!}\sum_{p=1}^{j}\frac{(2p-3)!!}{(2p)!!}\frac{(2j-2p-1)!!}{(2j-2p+2)!!}\frac{1}{\left(3+\sqrt{8}\right)^{2p}}\right\},$$
$$j=1,2,\ldots,\qquad \bar{\Lambda}_n^{(1)}=1,$$

і для них мають місце оцінки

$$\bar{U}_n^{(j)} < 2^{j-1}\frac{(2j-3)!!}{(2j)!!}\left(3+\sqrt{8}\right)^j,$$
$$\bar{\Lambda}_n^{(j+1)} < 2^{j-1}\frac{(2j-1)!!}{(2j+2)!!}\left(3+\sqrt{8}\right)^{j+1}.$$

Згадуючи позначення (2.25) та використовуючи оцінки (2.31), (2.32), приходимо до наступного твердження.

Теорема 2. *Нехай виконується умова*

$$\beta_n \equiv \frac{2\,\|q\|_\infty\left(3+\sqrt{8}\right)}{\pi n} < 1, \qquad n=1,2,\ldots, \tag{2.34}$$

і система (2.15), (2.17) *має розв'язок.*

Тоді FD-метод для задачі (1.1) *є експоненційно збіжним і мають місце наступні явні оцінки точності*

$$\left.\begin{aligned}\left|\lambda_{2n-1}-\lambda_n{}^{m^-}\right|\\ \left|\lambda_{2n}-\lambda_n{}^{m^+}\right|\end{aligned}\right\} \leqslant \sum_{j=m+1}^{\infty}\left|\lambda_n^{(j)\mp}\right| \leqslant \beta_n^m\frac{\|q\|_\infty}{1-\beta_n}\frac{1}{2}\frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!!}(3+\sqrt{8}), \tag{2.35}$$

$$\left.\begin{aligned}\left\|u_{2n-1}(x)-u_n{}^{m^-}(x)\right\|\\ \left\|u_{2n}(x)-u_n{}^{m^+}(x)\right\|\end{aligned}\right\} \leqslant \sum_{j=m+1}^{\infty}\left\|u_n^{(j)\mp}(x)\right\| \leqslant \beta_n^{m+1}\frac{1}{1-\beta_n}\frac{1}{2}\frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!!}. \tag{2.36}$$

Для доведення теореми 2 достатньо показати тільки, що ряди (2.8) і (2.9) збігаються до розв'язку λ_n і $u_n(x)$ задачі (1.1). А це здійснюється аналогічно тому, як це було зроблено в [26].

Лишилось розглянути випадок $n=0$. Рекурентний процес (2.11) набуває вигляду

$$\begin{gathered}\frac{d^2u_0^{(j+1)}(x)}{dx^2} = -F_0^{(j+1)}(x), \qquad x\in(0,1),\ u_0^{(j+1)}(0)=u_0^{(j+1)}(1),\\ \frac{du_0^{(j+1)}(0)}{dx}=\frac{du_0^{(j+1)}(1)}{dx}, \qquad j=0,1,\ldots,\end{gathered} \tag{2.37}$$

де

$$
\begin{gathered}
F_0^{(j+1)}(x) = \sum_{s=0}^{j} \lambda_0^{(j+1-s)} u_0^{(s)}(x) - q(x), \\
u_0^{(j)}(x) = u_0^{(0)}(x) = 1, \qquad \int_0^1 u_0^{(j+1)}(x)\, dx = 0.
\end{gathered}
\tag{2.38}
$$

З умови розв'язності задачі (2.37) знаходимо

$$
\lambda_0^{(j+1)} = \int_0^1 q(x) u_0^{(j)}(x)\, dx. \tag{2.39}
$$

Розв'язок крайової задачі (2.37) шукаємо у вигляді

$$
u_0^{(j+1)}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(F_0^{(j+1)}, v_p)}{4\pi^2 p^2} v_p(x) + a_0^{(j+1)} x + b_0^{(j+1)}, \tag{2.40}
$$

де

$$
v_{2p-1}(x) = \sqrt{2} \sin 2n\pi px, \qquad v_{2p} = \sqrt{2} \cos 2n\pi px.
$$

Сталі $a_0^{(j+1)}$ і $b_0^{(j+1)}$ вибираємо таким чином, щоб виконались умови періодичності з (2.37) та умова нормування з (2.38). Тоді будемо мати

$$
\begin{gathered}
b_0^{(j+1)} = a_0^{(j+1)} + b_0^{(j+1)}, \qquad a_0^{(j+1)} = a_0^{(j+1)}, \\
\frac{1}{2} a_0^{(j+1)} + b_0^{(j+1)} = 0.
\end{gathered}
$$

Звідси знаходимо

$$
a_0^{(j+1)} = 0, \qquad b_0^{(j+1)} = 0. \tag{2.41}
$$

З (2.39)–(2.41) одержуємо оцінки

$$
\begin{aligned}
&\left|\lambda_0^{(j+1)}\right| \leqslant \|q\|_\infty \left\|u_0^{(j)}\right\|, \qquad j = 0, 1, \ldots, \\
&\left\|u_0^{(j+1)}\right\|^2 = \left\|\int_x^1 (x-\xi) F_0^{(j+1)}(\xi) d\xi + a_0^{(j+1)} x\right\|^2 - \left[b_0^{(j+1)}\right]^2 \\
&\quad \leqslant \left\|\int_x^1 (x-\xi) F_0^{(j+1)}(\xi) d\xi + a_0^{(j+1)} x\right\|^2 \leqslant \frac{1}{4\pi^2} \left\|F_0^{(j+1)}\right\|^2 \\
&\quad < \alpha^2 \left\{\sum_{s=0}^{j-1} \left|\lambda_0^{(j+1-s)}\right| \left\|u_0^{(s)}\right\| + \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \left|\lambda_0^{(1)} - q(x)\right| \left\|u_0^{(j)}\right\|\right\}^2 \\
&\quad \leqslant \alpha^2 \left\{\sum_{s=0}^{j-1} \left|\lambda_0^{(j+1-s)}\right| \left\|u_0^{(s)}\right\| + \|q\|_\infty \left\|u_0^{(j)}\right\|\right\}^2, \\
&\quad j = 0, 1, \ldots, \qquad \left\|u_0^{(0)}\right\| = 1, \qquad \alpha = 1/(4\pi^2).
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

Після заміни

$$
\left|\lambda_0^{(j)}\right| = \|q\|_\infty^j \alpha^{j-1} \Lambda_0^{(j)}, \qquad \left\|u_0^{(j)}\right\| = \|q\|_\infty^j \alpha^j U_0^{(j)} \tag{2.43}
$$

система нерівностей (2.42) набуває вигляду

$$
\begin{gathered}
\Lambda_0^{(j+1)} \leqslant U_0^{(j)}, \\
U_0^{(j+1)} \leqslant \sum_{s=0}^{j} \Lambda_0^{(j+1-s)} U_0^{(s)} \leqslant \sum_{s=0}^{j} U_0^{(j-s)} U_0^{(s)}.
\end{gathered}
\tag{2.44}
$$

Розв'язок (2.44) мажорується розв'язком рівняння

$$\bar{U}_0^{j+1} = \sum_{s=0}^{j} \bar{U}_0^{(j-s)} \bar{U}_0^{(s)}, \qquad j = 0, 1, \ldots, \ \bar{U}_0^{(0)} = 1. \tag{2.45}$$

Користуючись методом твірних функцій з (2.45) одержуємо

$$f(z) - 1 = z[f(z)]^2, \qquad f(0) = 1,$$

що приводить до виразу

$$f(z) = \frac{1}{2z}\left\{1 - \sqrt{1-4z}\right\} = \frac{1}{2z}\left\{\frac{1}{2}4z + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(2p-3)!!}{(2p)!!}(4z)^p\right\}$$
$$= 1 + 2\sum_{p=2}^{\infty} \frac{(2p-3)!!}{(2p)!!}(4z)^{p-1}, \qquad 0 < z < \frac{1}{4},$$

з якого випливає, що

$$\bar{U}_0^{(j)} = 2\frac{(2j-1)!!}{(2j+2)!!}4^j, \qquad j = 1, 2, \ldots. \tag{2.46}$$

Співвідношення (2.43), (2.46) дають оцінки

$$\begin{aligned} \left|\lambda_0^{(j)}\right| &\leqslant \|q\|_\infty^j \, \alpha^{j-1} 2\frac{(2j-3)!!}{(2j)!!}4^{j-1}, \\ \left\|u_0^{(j)}\right\| &\leqslant \|q\|_\infty^j \, \alpha^j 2\frac{(2j-1)!!}{(2j+2)!!}4^j, \end{aligned} \tag{2.47}$$

з яких випливає наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай виконується умова*

$$\beta_0 \equiv \frac{1}{4\pi^2}\|q\|_\infty < 1, \tag{2.48}$$

тоді FD-метод для задачі (1.1) *є експоненційно збіжним і мають місце наступні явні оцінки точності*

$$\begin{aligned} \left|\lambda_0 - \overset{m}{\lambda}_0\right| &\leqslant \beta_0^m \frac{\|q\|_\infty}{1-\beta_0} 2\frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!!}, \\ \left|u_0(x) - \overset{m}{u}_0(x)\right| &\leqslant \beta_0^{m+1}\frac{1}{1-\beta_0} 2\frac{(2m+1)!!}{(2m+4)!!}. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Оцінки (2.35), (2.36), (2.49) є явними, хоча, як показують чисельні розрахунки, наведені у наступному підрозділі, і дещо грубими. Вони дають можливість одержати гарантовані верхні й нижні оцінки для точних власних значень та власних функцій.

2.2. Достатні умови збіжності узагальнених некласичних асимптотичних розвинень

Якщо умови (2.34) та (2.48) не виконуються, то виникає питання, як узагальнити метод, викладений в попередньому підрозділі, щоб забезпечити збіжність відповідних рядів (2.8), (2.9), які стають узагальненими некласичними асимптотичними розвиненнями власних значень та власних функцій задачі (2.1). Це дає можливість зробити FD-метод з $\bar{q}(x) \neq 0$ для всіх $x \in (0,1)$.

Замість задачі (2.7) розглядається задача

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+[\lambda-w(x,t)]\,u(x,t)=0, \qquad x\in(0,1),\\ u(0,t)=u(1,t), \qquad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial u(1,t)}{\partial x},\end{gathered} \tag{2.50}$$

де $w(x,t)=\bar{q}(x)+t\,[q(x)-\bar{q}(x)]$. Повторюючи ті ж самі міркування, що і у попередньому підрозділі, приходимо до необхідності розв'язування рекурентної послідовності задач, якою замінюється послідовність (2.10), (2.12):

$$\begin{gathered}\frac{d^2u_n^{(0)}(x)}{dx^2}+\left[\lambda_n^{(0)}-\bar{q}(x)\right]u_n^{(0)}(x)=0, \qquad x\in(0,1),\\ u_n^{(0)}(0)=u_n^{(0)}(1), \qquad \frac{du_n^{(0)}(0)}{dx}=\frac{du_n^{(0)}(1)}{dx},\\ \left\|u_n^{(0)}\right\|=1,\end{gathered} \tag{2.51}$$

$$\begin{gathered}\frac{d^2u_n^{(j+1)}(x)}{dx^2}+\left[\lambda_n^{(0)}-\bar{q}(x)\right]u_n^{(j+1)}(x)=-\sum_{s=0}^{j}\lambda_n^{(j+1-s)}u_n^{(s)}(x)+[q(x)-\bar{q}(x)]\,u_n^{(j)}(x)\\ \equiv -F_n^{(j+1)}(x), \qquad x\in(0,1),\\ u_n^{(j+1)}(0)=u_n^{(j+1)}(1), \frac{du_n^{(j+1)}(0)}{dx}=\frac{du_n^{(j+1)}(1)}{dx}, \qquad j=0,1,\ldots.\end{gathered} \tag{2.52}$$

Припустимо, що власні значення задачі (2.51) всі різні

$$\lambda_0^{(0)}<\lambda_1^{(0)}<\lambda_2^{(0)}<\ldots\lambda_n^{(0)}<\lambda_{n+1}^{(0)}<\ldots. \tag{2.53}$$

З умов розв'язності задач (2.52) знаходимо

$$\lambda_n^{(j+1)}=\int_0^1[q(x)-\bar{q}(x)]\,u_n^{(j)}(x)u_n^{(0)}(x)\,dx-\sum_{s=1}^{j}\lambda_n^{(j+1-s)}\int_0^1u_n^{(s)}(x)u_n^{(0)}(x)\,dx. \tag{2.54}$$

Умову, за якою будемо виділяти єдиний розв'язок задачі (2.52), наведемо пізніше.

Далі нам необхідно знайти розв'язок задачі (2.52), а потім його оцінити. Представлення цього розв'язку через власні функції задачі (2.51) приводить до виникнення малого знаменника типу $\lambda_n^{(0)}-\lambda_{n+1}^{(0)}$, що прямує до нуля, коли $n\to\infty$. Тому для оцінки розв'язку задачі (2.52) перепишемо її у вигляді

$$\begin{gathered}\frac{d^2u_n^{(j+1)}(x)}{dx^2}+(2\pi n)^2u_n^{(j+1)}(x)=-F_n^{(j+1)}(x)-\left[\lambda_n^{(0)}-(2\pi n)^2-\bar{q}(x)\right]u_n^{(j+1)}(x)\\ \equiv -\tilde{F}_n^{(j+1)}(x), \qquad x\in(0,1),\end{gathered} \tag{2.55}$$

$$u_n^{(j+1)}(0)=u_n^{(j+1)}(1), \qquad \frac{du_n^{(j+1)}(0)}{dx}=\frac{du_n^{(j+1)}(1)}{dx}. \tag{2.56}$$

Якщо знайти розв'язок задачі (2.52), (2.54) і підставити його в праву частину рівняння (2.56), то задача (2.56) буде мати розв'язок, а отже будуть виконані умови

$$\int_0^1\tilde{F}_n^{(j+1)}(x)\sqrt{2}\sin 2\pi nx\,dx=0, \qquad \int_0^1\tilde{F}_n^{(j+1)}(x)\sqrt{2}\cos 2\pi nx\,dx=0. \tag{2.57}$$

Помножимо обидві частини рівняння (2.55) після заміни x на ξ на множник

$$\frac{\sin 2\pi n(x-\xi)}{2\pi n}$$

і проінтегруємо від 0 до x, тоді після нескладних перетворень одержимо

$$\begin{aligned} u_n^{(j+1)}(x) &= \frac{\sin 2\pi n x}{2\pi n} u_n^{(j+1)\prime}(0) + u_n^{(j+1)}(0)\cos 2\pi n x \\ &- \int_0^x \frac{\sin 2\pi n\,(x-\xi)}{2\pi n}\left[\lambda_n^{(0)} - (2\pi n)^2 - \bar{q}(\xi)\right] u_n^{(j+1)}(\xi)\,d\xi \\ &- \int_0^x \frac{\sin 2\pi n\,(x-\xi)}{2\pi n} F_n^{(j+1)}(\xi)\,d\xi. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Для визначення єдиного розв'язку задачі (2.56) накладемо умову

$$\left|u_n^{(j+1)}(0)\right| + \frac{1}{2\pi n}\left|\frac{du_n^{(j+1)}(0)}{dx}\right| = \frac{1}{2\pi n}\sqrt{\frac{1+1/(4\pi n)}{2}}\left\|F_n^{(j+1)}\right\|. \tag{2.59}$$

Тоді з урахуванням того, що

$$\int_0^x \sin^2 2\pi n\,(x-\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 4\pi n x}{4\pi n}\right] \leqslant \frac{1+1/(4\pi n)}{2},$$

з (2.58) одержуємо

$$\left|u_n^{(j+1)}(x)\right| \leqslant \frac{d_n}{2\pi n}\sqrt{\frac{1+1/(4\pi n)}{2}}\left\{\int_0^x \left[u_n^{(j+1)}(\xi)\right]^2 d\xi\right\}^{1/2} + \frac{1}{\pi n}\sqrt{\frac{1/(4\pi n)}{2}}\left\|F_n^{(j+1)}\right\|,$$

де

$$d_n = \left\|\lambda_n^{(0)} - (2\pi n)^2 - \bar{q}(x)\right\|_\infty.$$

Остання нерівність приводить до співвідношення

$$\left[u_n^{(j+1)}(x)\right]^2 \leqslant \frac{d_n^2}{(2\pi n)^2}\left(1+\frac{1}{4\pi n}\right)\int_0^x \left[u_n^{(j+1)}(\xi)\right]^2 d\xi + \frac{1}{(\pi n)^2}\left(1+\frac{1}{4\pi n}\right)\left\|F_n^{(j+1)}\right\|^2. \tag{2.60}$$

Застосовуючи до (2.60) лему Гронуолла (див. [64, стор. 188]), одержуємо

$$\left[u_n^{(j+1)}(x)\right]^2 \leqslant \frac{1}{(\pi n)^2}\left(1+\frac{1}{4\pi n}\right)\exp\left[\frac{d_n^2}{(2\pi n)^2}\left(1+\frac{1}{4\pi n}\right)\right]\left\|F_n^{(j+1)}\right\|^2,$$

звідки

$$\left\|u_n^{(j+1)}(x)\right\| \leqslant \frac{1}{\pi n}\sqrt{1+\frac{1}{4\pi n}}\exp\left[\frac{d_n^2}{2\,(2\pi n)^2}\left(1+\frac{1}{4\pi n}\right)\right]\left\|F_n^{(j+1)}\right\|.$$

Оскільки

$$\left|\lambda_n^{(0)} - (2\pi n)^2\right| \leqslant \|q\|_\infty,$$

що випливає з принципу мінімакса (див. [65], гл. I.4), тоді

$$d_n \leqslant 2\,\|q\|_\infty$$

і

$$\left\|u_n^{(j+1)}\right\| \leqslant M_n \left\|F_n^{(j+1)}\right\|, \tag{2.61}$$

де

$$M_n = \frac{1}{\pi n}\sqrt{1+\frac{1}{4\pi n}}\exp\left[\frac{\|q\|_\infty}{2\,(\pi n)^2}\left(1+\frac{1}{4\pi n}\right)\right]. \tag{2.62}$$

Далі маємо

$$\left\|F_n^{(j+1)}\right\| \leqslant \sum_{s=0}^{j} \left|\lambda_n^{(j+1-s)}\right| \left\|u_n^{(s)}\right\| + \|q-\bar{q}\|_\infty \left\|u_n^{(j)}\right\|,$$

що разом з (2.61), (2.54) приводить до системи нерівностей

$$\left|\lambda_n^{(j+1)}\right| \leqslant \sum_{s=1}^{j} \left|\lambda_n^{(j+1-s)}\right| \left\|u_n^{(s)}\right\| + \|q-\bar{q}\|_\infty \left\|u_n^{(j)}\right\|,$$

$$\left\|u_n^{(j+1)}\right\| \leqslant M_n \left\{\sum_{s=0}^{j} \left|\lambda_n^{(j+1-s)}\right| \left\|u_n^{(s)}\right\| + \|q-\bar{q}\|_\infty \left\|u_n^{(j)}\right\|\right\}, \tag{2.63}$$

$$j = 0, 1, \ldots, \qquad \left\|u_n^{(0)}\right\| = 1.$$

Зробимо заміну

$$\left|\lambda_n^{(j)}\right| = M_n^{j-1} \|q-\bar{q}\|_\infty^j \Lambda_n^{(j)}, \qquad \left\|u_n^{(j)}\right\| = (M_n \|q-\bar{q}\|_\infty)^j U_n^{(j)}, \tag{2.64}$$

тоді система (2.63) набуде вигляду

$$\Lambda_n^{(j+1)} \leqslant \sum_{s=1}^{j} \Lambda_n^{(j+1-s)} U_n^{(s)} + U_n^{(j)}, \qquad U_n^{(j+1)} \leqslant \sum_{s=0}^{j} \Lambda_n^{(j+1-s)} U_n^{(s)} + U_n^{(j)},$$

$$j = 0, 1, \ldots, \qquad U_n^{(0)} = 1.$$

Розв'язок останньої мажорується зверху розв'язком наступної системи рівняннь

$$\bar{\Lambda}_n^{(j+1)} = \sum_{s=1}^{j} \bar{\Lambda}_n^{(j+1-s)} \bar{U}_n^{(s)} + \bar{U}_n^{(j)}, \qquad \bar{U}_n^{(j+1)} = \sum_{s=0}^{j} \bar{\Lambda}_n^{(j+1-s)} \bar{U}_n^{(s)} + \bar{U}_n^{(j)},$$

яку розв'язуємо за допомогою леми 1 з підрозділу 2.1.

Повертаючись до (2.63), з урахуванням (2.64) та леми 1 з підрозділу 2.1, одержуємо

$$\left|\lambda_n^{(j+1)}\right| \leqslant \|q-\bar{q}\|_\infty \beta_n^j \frac{1}{2} \frac{(2j-1)!!}{(2j+2)!!} \left(3+\sqrt{8}\right), \tag{2.65}$$

$$\left\|u_n^{(j+1)}\right\| \leqslant \beta_n^{j+1} \frac{1}{2} \frac{(2j-1)!!}{(2j+2)!!}, \tag{2.66}$$

де

$$\beta_n = 2\left(3+\sqrt{8}\right) M_n \|q-\bar{q}\|_\infty. \tag{2.67}$$

Знайдені оцінки (2.65), (2.66) дають можливість довести наступне твердження.

Теорема 4. *Нехай виконана умова*

$$\beta_n = 2\left(3+\sqrt{8}\right) M_n \|q-\bar{q}\|_\infty < 1, \tag{2.68}$$

тоді розв'язок задачі (1.1) *представляється за допомогою FD-методу у вигляді рядів*

$$\begin{aligned} u_n(x) \equiv u_n(x, q(\cdot)) &= \sum_{j=0}^{\infty} u_n^{(j)}(x) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} u_n^{(j)}(x, \bar{q}(\cdot)), \\ \lambda_n \equiv \lambda_n(q(\cdot)) &= \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_n^{(j)} \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_n^{(j)}(\bar{q}(\cdot)), \end{aligned} \tag{2.69}$$

які збігаються із швидкістю не повільніше ніж геометрична прогресія із знаменником β_n, і мають місце наступні явні оцінки

$$\left|\lambda_n - \overset{m}{\lambda}_n\right| \equiv \left|\lambda_n\left(q\left(\cdot\right)\right) - \sum_{j=0}^{m} \lambda_n^{(j)}\left(\bar{q}\left(\cdot\right)\right)\right| \leqslant \left\|q - \bar{q}\right\|_\infty \frac{3+\sqrt{8}}{2} \frac{\beta_n^m}{1-\beta_n} \frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!!}, \quad (2.70)$$

$$\left\|u_n(x) - \overset{m}{u}_n(x)\right\| \equiv \left\|u_n\left(x, q\left(\cdot\right)\right) - \sum_{j=0}^{m} u_n^{(j)}\left(x, \bar{q}\left(\cdot\right)\right)\right\| \leqslant \frac{\beta_n^{m+1}}{1-\beta_n} \frac{1}{2} \frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!!}. \quad (2.71)$$

Тобто FD-метод є експоненційно збіжним.

Доведення збіжності рядів (2.69) та справедливості оцінок (2.70), (2.71) одразу випливає з (2.65), (2.66). Лишилось довести, що ряди (2.69) збігаються до розв'язку задачі (1.1). Це здійснюється за методикою роботи [26].

Зауваження 1. Умову (2.53) можна замінити на умову про простоту тільки одного λ_n. Крім того, треба зазначити, що підстави для зазначених умов на власні значення задачі (2.51) дає робота [66]. В цій роботі знайдено достатні умови на функцію $q(x)$, які гарантують існування такого великого номеру N, починаючи з якого всі власні значення будуть прості.

Зауваження 2. Застосований при доведенні теореми 4 підхід дає можливість одержати явні апріорні оцінки і для випадку умов третього роду при $\bar{q}(x) \neq 0$ для всіх $x \in (0,1)$. Оскільки послідовність викладок при цьому за змістом залишається тією ж самою, а міняється тільки за формою, тому ми їх приводити не будемо. Обмежимось тільки тим, що вкажемо, що для умов Діріхле буде мати місце теорема 4, в якій міняється тільки значення M_n з (2.62) на

$$M_n = \frac{1}{\sqrt{2}\pi n} \exp\left\{\frac{\left\|q\right\|_\infty^2}{\left(\pi n\right)^2}\right\}.$$

Розглянемо випадок $n = 0$. Розв'язок відповідної задачі (2.52) представимо у вигляді

$$u_0^{(j+1)}(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\left(F_0^{(j+1)}, u_p^{(0)}\right)}{\lambda_p^{(0)} - \lambda_0^{(0)}} u_p^{(0)}(x), \quad (2.72)$$

причому була використана умова

$$\int_0^1 u_0^{(j+1)}(x) u_0^{(0)}(x)\, dx = 0. \quad (2.73)$$

Умови розв'язності задачі (2.52) з урахуванням (2.73) приводять до співвідношення

$$\lambda_0^{(j+1)} = \int_0^1 \left[q\left(x\right) - \bar{q}(x)\right] u_0^{(j)}(x) u_0^{(0)}(x)\, dx. \quad (2.74)$$

З (2.72) одержуємо

$$\left\|u_0^{(j+1)}\right\| \leqslant \frac{1}{\lambda_1^{(0)} - \lambda_0^{(0)}} \left\|F_0^{(j+1)}\right\|, \quad (2.75)$$

але

$$\begin{aligned}\left\|F_0^{(j+1)}\right\|^2 &= \left\|\sum_{p=1}^{j} \lambda_0^{(j+1-p)} u_0^{(p)} - \left(q - \bar{q}\right) u_0^{(j)}\right\|^2 - \left[\lambda_0^{(j+1)}\right]^2 \\ &\leqslant \left\|q - \bar{q}\right\|_\infty^2 \left(\sum_{p=0}^{j} \left\|u_0^{(j-p)}\right\| \left\|u_0^{(p)}\right\|\right)^2,\end{aligned}$$

де було враховано (2.74). Тоді з (2.75) будемо мати

$$\left\|u_0^{(j+1)}\right\| \leqslant M_0 \sum_{p=0}^{j} \left\|u_0^{(j-p)}\right\| \|u_0^p\|, \tag{2.76}$$

де

$$M_0 = \frac{\|q-\bar{q}\|_\infty}{\lambda_1^{(0)} - \lambda_0^{(0)}}.$$

Використовуючи лему 1 з підрозділу 1.1 разом з (2.76) та (2.74), приходимо до оцінок

$$\left\|u_0^{(j)}\right\| \leqslant \beta_0^j 2\frac{(2j-1)!!}{(2j+2)!!}, \tag{2.77}$$

$$\left|\lambda_0^{(j+1)}\right| \leqslant \|q-\bar{q}\|_\infty \beta_0^j 2\frac{(2j-1)!!}{(2j+2)!!}, \tag{2.78}$$

де

$$\beta_0 = \frac{4\|q-\bar{q}\|_\infty}{\lambda_1^{(0)} - \lambda_0^{(0)}}. \tag{2.79}$$

Оцінки (2.77) і (2.78) дозволяють довести наступне твердження.

Теорема 5. *Нехай*

$$\beta_0 = \frac{4\|q-\bar{q}\|_\infty}{\lambda_1^{(0)} - \lambda_0^{(0)}} < 1.$$

Тоді розв'язок задачі (1.1) *для* $n = 0$ *представляється у вигляді рядів*

$$u_0(x) \equiv u_0(x, q(\cdot)) = \sum_{j=0}^{\infty} u_0^{(j)}(x) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} u_0^{(j)}(x, \bar{q}(\cdot)),$$

$$\lambda_0 \equiv \lambda_0(q(\cdot)) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_0^{(j)} \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_0^{(j)}(\bar{q}(\cdot)),$$

які збігаються із швидкістю не повільніше ніж геометрична прогресія із знаменником β_0, *і мають місце наступні явні оцінки*

$$\left|\lambda_0 - \overset{m}{\lambda_0}\right| \equiv \left|\lambda_0(q(\cdot)) - \sum_{j=0}^{m} \lambda_0^{(j)}(\bar{q}(\cdot))\right| \leqslant \|q-\bar{q}\|_\infty \frac{\beta_0^m}{1-\beta_0} 2\frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!!}, \tag{2.80}$$

$$\left\|u_0(x) - \overset{m}{u_0}(x)\right\| \equiv \left\|u_0(x, q(\cdot)) - \sum_{j=0}^{m} u_0^{(j)}(x, \bar{q}(\cdot))\right\| \leqslant \frac{\beta_0^{m+1}}{1-\beta_0} 2\frac{(2m+1)!!}{(2m+4)!!}. \tag{2.81}$$

Тобто FD-метод є експоненційно збіжним.

Доведена теорема 4 дає достатні умови збіжності узагальнених некласичних асимптотичних рядів (2.69). Реалізацію FD-методу, тобто конструктивну побудову розв'язків рівнянь (2.51), (2.52), можна здійснити за допомогою теорії точних трьохточкових різницевих схем О. А. Самарського, А. М. Тихонова [37] (розповсюджену на задачі Штурма–Ліувілля В. Г. Приказчиковим), аналогічно тому, як це було зроблено в підрозділі 1.1.

На нерівномірній сітці $\hat{\omega}$ у її внутрішніх вузлах з використанням позначень підрозділу 1.1 записуємо те ж саме різницеве рівняння

$$\left(a y_{\bar{x}}^{(j+1)}\right)_{\hat{x}} - d(x) y^{(j+1)}(x) = -\varphi^{(j+1)}(x), \qquad x \in \hat{\omega}, \tag{2.82}$$

доповнити яке треба точними різницевими аналогами умов періодичності. Щоб знайти останні, запишемо розв'язок рівняння з (2.52) на відрізках $[0,x_1]$ і $[x_N,1]$ через функцію Гріна для умов Діріхле:

$$u_n^{(j+1)}(x)=\frac{\mu_1(\nu_1 x)}{\mu_1(\nu_1 h_1)}u_n^{(j+1)}(x_1)+\frac{\mu_1(\nu_1(x_1-x))}{\mu_1(\nu_1 h_1)}u_n^{(j+1)}(0)$$
$$+\int_0^{x_1} G^1(x,\xi)\,F_n^{(j+1)}(\xi)\,d\xi,\qquad x\in[0,x_1],\tag{2.83}$$

$$G^1(x,\xi)=\mu_1^{-1}(\nu_1 h_1)\begin{cases}\mu_1(\nu_1 x)\,\mu_1(\nu_1(x_1-\xi)), & 0\leqslant x\leqslant\xi,\\ \mu_1(\nu_1\xi)\,\mu_1(\nu_1(x_1-x)), & \xi\leqslant x\leqslant x_1,\end{cases}$$

$$u_n^{(j+1)}(x)=\frac{\mu_1(\nu_{N+1}(x-x_N))}{\mu_1(\nu_{N+1}h_{N+1})}u_n^{(j+1)}(1)+\frac{\mu_1(\nu_{N+1}(1-x))}{\mu_1(\nu_{N+1}h_{N+1})}u_n^{(j+1)}(x_N)$$
$$+\int_{x_N}^{1} G^{N+1}(x,\xi)\,F_n^{(j+1)}(\xi)\,d\xi,\qquad x\in[x_N,1],\tag{2.84}$$

$$G^{N+1}(x,\xi)=\mu_1^{-1}(\nu_{N+1}h_{N+1})\begin{cases}\mu_1(\nu_{N+1}(x-x_N))\,\mu_1(\nu_{N+1}(1-\xi)), & x_N\leqslant x\leqslant\xi,\\ \mu_1(\nu_{N+1}(\xi-x_N))\,\mu_1(\nu_{N+1}(1-x)), & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

Виходячи з (2.83), (2.84), записуємо точні дискретні аналоги умов періодичності

$$u_n^{(j+1)}(0)=u_n^{(j+1)}(1),$$

$$[\mu_1(\nu_1 h_1)]^{-1}\left\{u_n^{(j+1)}(x_1)-\mu_2(\nu_1 h_1)\,u_n^{(j+1)}(0)+\int_0^{x_1}\mu_1(\nu_1(x_1-\xi))\,F_n^{(j+1)}(\xi)\,d\xi\right\}$$
$$=[\mu_1(\nu_{N+1}h_{N+1})]^{-1}$$
$$\times\left\{\mu_2(\nu_{N+1}h_{N+1})\,u_n^{(j+1)}(1)-u_n^{(j+1)}(x_N)\right.$$
$$\left.+\int_{x_N}^{1}\mu_1(\nu_{N+1}(\xi-x_N))\,F_n^{(j+1)}(\xi)\,d\xi\right\}.\tag{2.85}$$

Таким чином одержуємо точну різницеву схему

$$\left(ay_{\bar{x}}^{(j+1)}\right)_{\hat{x}}-d(x)y^{(j+1)}(x)=-\varphi^{(j+1)}(x),\qquad x\in\hat{\omega},$$
$$y^{(j+1)}(0)=y^{(j+1)}(1),$$
$$[\mu_1(\nu_1 h_1)]^{-1}\left\{y^{(j+1)}(x_1)-\mu_2(\nu_1 h_1)\,y^{(j+1)}(0)+\int_0^{x_1}\mu_1(\nu_1(x_1-\xi))\,F_n^{(j+1)}(\xi)\,d\xi\right\}$$
$$=[\mu_1(\nu_{N+1}h_{N+1})]^{-1}\left\{\mu_2(\nu_{N+1}h_{N+1})\,y^{(j+1)}(0)-y^{(j+1)}(x_N)\right.$$
$$\left.+\int_{x_N}^{1}\mu_1(\nu_{N+1}(\xi-x_N))\,F_n^{(j+1)}(\xi)\,d\xi\right\},$$
$$j=0,1,\dots.\tag{2.86}$$

Різницева схема (2.86) є виродженою. Умови її розв'язності виконуються автоматично за рахунок вибору $\lambda_n^{(j+1)}$ згідно з формулою (2.54). Будемо знаходити такий розв'язок схеми (2.86), який є проекцією на сітку розв'язку задачі (2.52) $u_n^{(j+1)}(x)$. А це можна зробити, бо за побудовою серед всіх розв'язків різницевої схеми (2.86) знаходиться проекція на сітку $\hat{\omega}$ функції $u_n^{(j+1)}(x)$.

Перепишемо різницеву схему (2.83) наступним чином

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{\hbar_1}\left[a\left(x_2\right) \frac{y^{(j+1)}\left(x_2\right)-y^{(j+1)}(x_1)}{h_2}-a(x_1) \frac{y^{(j+1)}\left(x_1\right)-y^{(j+1)}(1)}{h_1}\right]-d\left(x_1\right) y^{(j+1)}(x_1) \\
=-\varphi^{(j+1)}(x_1),
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{\hbar_i}\left[a(x_{i+1}) \frac{y^{(j+1)}(x_{i+1})-y^{(j+1)}(x_i)}{h_{i+1}}-a(x_i) \frac{y^{(j+1)}(x_i)-y^{(j+1)}(x_{i-1})}{h_i}\right]-d(x_i) y^{(j+1)}(x_i) \\
=-\varphi^{(j+1)}(x_i), \qquad i=2, \ldots, N,
\end{gathered} \tag{2.87}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{a(x_1)}{h_1} & \left[y^{(j+1)}(x_1)-\mu_2\left(\nu_1 h_1\right) y^{(j+1)}(1)\right] \\
& -\frac{a\left(x_{N+1}\right)}{h_{N+1}}\left[\mu_2\left(\nu_{N+1} h_{N+1}\right) y^{(j+1)}(1)-y^{(j+1)}\left(x_N\right)\right] \\
& =-\frac{a(x_1)}{h_1} \int_0^{x_1} \mu_1\left(\nu_1\left(x_1-\xi\right)\right) F_n^{(j+1)}(\xi)\, d \xi \\
& -\frac{a\left(x_{N+1}\right)}{h_{N+1}} \int_{x_N}^1 \mu_1\left(\nu_{N+1}\left(\xi-x_N\right)\right) F_n^{(j+1)}(\xi)\, d \xi .
\end{aligned}
$$

В системі (2.87) віднімемо передостаннє рівняння, а у першому та останньому члени, що містять $y^{(j+1)}(1)$, перенесемо у праву частину. Тоді одержимо невироджену систему лінійних алгебраїчних рівнянь, матриця якої майже трьохдіагональна (крім останнього рядка):

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{\hbar_1}\left[a\left(x_2\right) \frac{y^{(j+1)}\left(x_2\right)-y^{(j+1)}(x_1)}{h_2}-a(x_1) \frac{y^{(j+1)}\left(x_1\right)}{h_1}\right]-d\left(x_1\right) y^{(j+1)}(x_1) \\
=-\varphi^{(j+1)}(x_1)-\frac{a(x_1)}{\hbar_1 h_1} y^{(j+1)}(1),
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{\hbar_i}\left[a\left(x_{i+1}\right) \frac{y^{(j+1)}(x_{i+1})-y^{(j+1)}(x_i)}{h_{i+1}}-a\left(x_i\right) \frac{y^{(j+1)}(x_i)-y^{(j+1)}\left(x_{i-1}\right)}{h_i}\right] \\
-d(x_i) y^{(j+1)}\left(x_i\right) \\
=-\varphi^{(j+1)}\left(x_i\right), \qquad i=2, \ldots, N-1,
\end{gathered} \tag{2.88}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{a(x_1)}{h_1} & y^{(j+1)}(x_1)+\frac{a\left(x_{N+1}\right)}{h_{N+1}} y^{(j+1)}\left(x_N\right) \\
& =\left[\frac{a(x_1)}{h_1} \mu_2\left(\nu_1 h_1\right)+\frac{a\left(x_{N+1}\right)}{h_{N+1}} \mu_2\left(\nu_{N+1} h_{N+1}\right)\right] y^{(j+1)}(1) \\
& -\frac{a(x_1)}{h_1} \int_0^{x_1} \mu_1\left(\nu_1\left(x_1-\xi\right)\right) F_n^{(j+1)}(\xi)\, d \xi \\
& -\frac{a\left(x_{N+1}\right)}{h_{N+1}} \int_{x_N}^1 \mu_1\left(\nu_{N+1}\left(\xi-x_N\right)\right) F_n^{(j+1)}(\xi)\, d \xi .
\end{aligned}
$$

Після розв'язання системи (2.88) (яка є невиродженою згідно припущення, що всі $\lambda_n^{(0)}$ є простими власними значеннями базової задачі, хоча це припущення не є суттєвим) модифікованим методом прогонки [36], одержимо її розв'язок, що залежить від параметра $y^{(j+1)}(1)$. Далі відновлюємо точний розв'язок неперервної задачі (2.52) за правилом

$$u_n^{(j+1)}(x) = \left[\mu_1(\nu_i h_i)\right]^{-1}\left[\mu_1(\nu_i(x - x_{i-1}))\, y^{(j+1)}(x_i) + \mu_1(\nu_i(x_i - x))\, y^{(j+1)}(x_{i-1})\right] + \int_{x_{i-1}}^{x_i} G^i(x,\xi)\, F_n^{(j+1)}(\xi)\, d\xi, \qquad x \in [x_{i-1}, x_i],\ i = 1,\dots,N+1, \tag{2.89}$$

де

$$G^i(x,\xi) = \mu_1^{-1}(\nu_i h_i)\begin{cases} \mu_1(\nu_i(x - x_{i-1}))\,\mu_1(\nu_i(x_i - \xi)), & x_{i-1} \leqslant x \leqslant \xi, \\ \mu_1(\nu_i(\xi - x_{i-1}))\,\mu_1(\nu_i(x_i - x)), & \xi \leqslant x \leqslant x_i. \end{cases}$$

Щоб знайти $y^{(j+1)}(1)$, скористаємось умовою нормування (2.59)

$$\left|y^{(j+1)}(1)\right| + \frac{1}{2\pi n}\left|\mu_1(\nu_1 h_1)\right|^{-1}\left|y^{(j+1)}(x_1) - \mu_2(\nu_1 h_1) y^{(j+1)}(1) + \int_0^{x_1} \mu_1(\nu_1(x_1 - \xi)) F_n^{(j+1)}(\xi)\, d\xi\right| = \frac{1}{2\pi n}\sqrt{\frac{1 + 1/(4\pi n)}{2}}\left\|F_n^{(j+1)}\right\|. \tag{2.90}$$

Рекурентний процес (2.52) повторюємо по j від 0 до $m-1$. Щоб його розпочати, треба визначити початкові умови $\lambda_n^{(0)}$ і $u_n^{(0)}(x)$. Це робиться наступним чином. Спочатку розв'язуємо однорідну систему (2.86) при $j = -1$, $\varphi^{(0)}(x) \equiv 0$ і $F_n^{(0)}(\xi) \equiv 0$. Вона буде мати нетривіальний розв'язок, оскільки її визначник $\Delta_N\left(\lambda^{(0)}\right)$ дорівнює нулю, тобто

$$\Delta_N(\lambda^{(0)}) = \begin{vmatrix} \left\{-\left(\frac{a(x_2)}{h_2} + \frac{a(x_1)}{h_1}\right) - \hbar_1 d(x_1)\right\} & \frac{a(x_2)}{h_2} & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{a(x_1)}{h_1} \\ \frac{a(x_2)}{h_2} & \left\{-\left(\frac{a(x_3)}{h_3} + \frac{a(x_2)}{h_2}\right) - \hbar_2 d(x_2)\right\} & \frac{a(x_3)}{h_3} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{a(x_N)}{h_N} & \left\{-\left(\frac{a(x_{N+1})}{h_{N+1}} + \frac{a(x_N)}{h_N}\right) - \hbar_N d(x_N)\right\} & \frac{a(x_{N+1})}{h_{N+1}} \\ \frac{a(x_1)}{h_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{a(x_{N+1})}{h_{N+1}} & \left\{-\frac{a(x_1)}{h_1}\mu_2(\nu_1 h_1) - \frac{a(x_{N+1})}{h_{N+1}}\mu_2(\nu_{N+1} h_{N+1})\right\} \end{vmatrix} = 0. \tag{2.91}$$

Для знаходження нулів $\lambda_n^{(0)}$ рівняння (2.91) можна скористатися оцінками

$$(2\pi n)^2 + q_{\min} \leqslant \lambda_n^{(0)} \leqslant (2\pi n)^2 + q_{\max}, \tag{2.92}$$

де

$$q_{\min} = \min_{x\in[0,1]} q(x), \qquad q_{\max} = \max_{x\in[0,1]} q(x).$$

Можна знайти таке N_0, починаючи з якого для всіх $n \geqslant N_0$ відрізки (2.92), що містять нулі визначника (2.91) не будуть перетинатися, тобто нулі будуть відокремлені. Це N_0 визначається з нерівності

$$[2\pi(n-1)]^2 + q_{\max} \leqslant (2\pi n)^2 + q_{\min}, \qquad n \geqslant N_0,$$

що приводить до формули

$$N_0 = \left\lceil \frac{q_{\max} - q_{\min} + 4\pi^2}{8\pi^2} \right\rceil.$$

Тут $\lceil a \rceil$ — найменше ціле, що більше або дорівнює a. Найбільш просто знаходяться корені рівняння (2.91), коли

$$q_{\max} - q_{\min} \leqslant 4\pi^2, \tag{2.93}$$

бо в цьому випадку всі корені розділяються і їх можна знайти методом бісекції (див., наприклад, [67]). Якщо умова (2.93) не виконується, то знаходження перших $(N-1)$-го кореня рівняння (2.91) можна здійснити шляхом табулювання значень визначника $\Delta_N\left(\lambda^{(0)}\right)$ з певним кроком і знаходження сусідніх точок, де він змінює знак, а далі — знов метод бісекції.

Після того, як корені рівняння (2.91) знайдено, підставляємо n-й корінь $\lambda_n^{(0)}$ в однорідну систему (2.86) при $j=-1$, $\varphi^{(0)}(x) \equiv 0$ та $F_n^{(0)}(\xi) \equiv 0$ і доповнюємо її умовою нормування

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 \left[u_n^{(0)}(x)\right]^2 dx \\ &= \sum_{i=1}^{N+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\frac{\mu_1\left(\nu_i\left(x - x_{i-1}\right)\right)}{\mu_1\left(\nu_i h_i\right)} y^{(0)}\left(x_i\right) + \frac{\mu_1\left(\nu_i\left(x_i - x\right)\right)}{\mu_1\left(\nu_i h_i\right)} y^{(0)}\left(x_{i-1}\right)\right]^2 dx. \end{aligned}$$

Розв'язок одержаної системи здійснюємо шляхом, аналогічним тому, як це робилося при знаходженні розв'язку системи (2.86) при $j \geqslant 0$.

Приклад 1. Нехай в задачі (1.1) $q(x) = x$. Продовжимо $q(x)$ періодично з періодом 1 на всю вісь $(-\infty, \infty)$ і збережемо за нею старе позначення $q(x)$, тобто

$$q(x) = x - n, \qquad n \leqslant x < n+1, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Одержана функція є кусково-гладкою і для неї не мають місце класичні асимптотичні формули для власних функцій і власних значень. Умова (2.34) набуває вигляду

$$\beta_n = \frac{2 * 1.855245974}{n} < 1$$

і буде виконуватись для $n = 4, 5, \ldots$. Результати обчислень для $\lambda_0{}^m$, $m = 0, \ldots, 5$, приведені у табл. 2.1, а для $\lambda_n{}^{m\pm}$, $n = 1, \ldots, 4$, $m = 1, \ldots, 4$, — у табл. 2.2. Теоретична оцінка з теореми 2 дає

$$\frac{1}{4\pi^2} \left| \lambda_4^{\pm} - \overset{4\pm}{\lambda_4} \right| \leqslant 0.000014944, \tag{2.94}$$

в той час, як розрахунки показують, що 13 розрядів після коми є вірними. Зауважимо, що з (2.94) випливають нижня та верхня границі для точних власних значень $\lambda_4^{\pm}$.

Точні власні функції для розглядуваного прикладу виражається через функції Бесселя і мають вигляд

$$u_0(x) = \begin{cases} \left[A_0 J_{1/3}(\frac{2}{3}(\lambda_0 - x)^{3/2}) + B_0 J_{-1/3}(\frac{2}{3}(\lambda_0 - x)^{3/2})\right] \sqrt{\lambda_0 - x}, & 0 \le x \le \lambda_0, \\ \left[C_0 I_{1/3}(\frac{2}{3}(x - \lambda_0)^{3/2}) + D_0 I_{-1/3}(\frac{2}{3}(x - \lambda_0)^{3/2})\right] \sqrt{x - \lambda_0}, & \lambda_0 \le x \le 1, \end{cases}$$

$$u_n^{\pm}(x) = \sqrt{\lambda_n^{\pm} - x} \left[A_n^{\pm} J_{1/3}\left(\frac{2}{3}(\lambda_n^{\pm} - x)^{3/2}\right) + B_n^{\pm} J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}(\lambda_n^{\pm} - x)^{3/2}\right)\right],$$
$$n = 1, 2, \ldots,$$

ТАБЛИЦЯ 2.1. Результати розрахунків для $\lambda_0 = 0.012629967834$ при $q(x) = x$ і $\bar{q}(x) \equiv 0$

j	$\overset{j}{\lambda_0}/(4\pi^2)$
0	0
1	0.0126651479552
2	0.0126299669887
3	0.0126299669887
4	0.0126299678349
5	0.0126299678349

де постійні A_0, B_0, C_0 і D_0 шукаються з крайових умов та умов неперервності $u_0(x)$ та $u_0'(x)$ при переході через точку $x = \lambda_0$, а постійні $A_n^{\pm}$ і $B_n^{\pm}$– з умов періодичності. В результаті для визначення A_0, B_0, C_0, D_0, $A_n^{\pm}$ і $B_n^{\pm}$ одержуються системи лінійних алгебраїчних рівнянь четвертого та другого порядку відповідно. Прирівнюючи їх визначники нулю, одержуємо трансцендентні рівняння для знаходження власних значень.

За допомогою системи комп'ютерної алгебри Mathematica при $\bar{q}(x) \equiv 0$ були знайдені аналітично наближення до λ_0 і $u_0(x)$, які мають вигляд

$$\lambda_0^{(0)} = 0, \qquad \lambda_0^{(0)} = 1/2,$$
$$u_0^{(0)} = 1, \quad u_0^{(1)} = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12},$$
$$\lambda_0^{(2)} = -1/172,$$
$$u_0^{(2)} = \frac{x^6}{180} - \frac{x^5}{60} + \frac{5x^4}{288} - \frac{x^3}{144} + \frac{x^2}{1440} + \frac{1}{60480},$$
$$\lambda_0^{(3)} = 0,$$
$$u_0^{(3)} = \frac{x^9}{12960} - \frac{x^8}{2880} + \frac{37x^7}{60480} - \frac{x^6}{1920} + \frac{19x^5}{86400} - \frac{x^4}{17280} + \frac{x^3}{45360} - \frac{x^2}{241920} - \frac{x}{1209600},$$
$$\lambda_0^{(4)} = \frac{4}{119750400}, \qquad \lambda_0^{(5)} = 0.$$

Числові значення $\overset{j}{\lambda_0}$, $j = 0, \ldots, 5$, наведені у таблиці 2.1.

З оцінки (2.49) випливає, що

$$|\lambda_0 - \overset{5}{\lambda}_0| \le \frac{21}{262144} \frac{1}{\pi^8(4\pi^2 - 1)} \le 0.21941342 * 10^{-9}.$$

2.3. Антиперіодичні умови

Розглядається задача

$$\begin{aligned} &u''(x) + [\lambda - q(x)]\, u(x) = 0, \qquad x \in (0,1), \\ &u(0) = -u(1), \qquad u'(0) = -u'(1). \end{aligned} \tag{2.95}$$

Ця задача є предметом розгляду даного підрозділу, тому що вона близька за технологією розгляду до задачі Штурма–Ліувілля з періодичними умовами.

Почнемо з випадку FD-методу з $\bar{q}(x) \equiv 0$ і $q(x) = q(1 - x)$.

ТАБЛИЦЯ 2.2. Результати розрахунків для λ_n, $n = 1, \ldots, 4$, при $q(x) = x$ ($\bar{q}(x) \equiv 0$ та $\lambda_n{}^{(0)} = (2\pi n)^2$).

n	j	$\frac{\lambda_n{}^{j-}}{4\pi^2}$	$\frac{\lambda_n{}^{j+}}{4\pi^2}$
1	1	1.01064942705322	1.01468086885574
	2	1.01065873108686	1.01469017289101
	3	1.01065870090782	1.01469020307004
	4	1.01065870048470	1.01469020264692
2	1	4.01165728750426	4.01367300840633
	2	4.01166037534968	4.01367609625176
	3	4.01166037416664	4.01367609743480
	4	4.01166037416654	4.01367609743469
3	1	9.01199324098793	9.01333705492265
	2	9.01199467606631	9.01333849000103
	3	9.01199467590467	9.01333849016267
	4	9.01199467590480	9.01333849016280
4	1	16.01216121772977	16.01316907818081
	2	16.01216203730594	16.01316989775698
	3	16.01216203726710	16.01316989779583
	4	16.01216203726713	16.01316989779586

Базова задача має вигляд

$$\frac{d^2u_n^{(0)}(x)}{dx^2} + \lambda_n^{(0)}u_n^{(0)}(x) = 0, \qquad x \in (0,1),$$
$$u_n^{(0)}(0) = -u_n^{(0)}(1), \qquad \frac{du_n^{(0)}(0)}{dx} = -\frac{du_n^{(0)}(1)}{dx}. \tag{2.96}$$

Очевидно, що її розв'язок має вигляд

$$\lambda_1^{(0)} = \lambda_2^{(0)} = \pi^2, \qquad \lambda_3^{(0)} = \lambda_4^{(0)} = (3\pi)^2, \qquad \ldots,$$
$$\lambda_{2n-1}^{(0)} = \lambda_{2n}^{(0)} = [(2n-1)\pi]^2, \qquad \ldots,$$
$$u_1^{(0)}(x) = \sqrt{2}\sin\pi x, \qquad u_2^{(0)}(x) = \sqrt{2}\cos\pi x, \qquad \ldots,$$
$$u_{2n-1}^{(0)}(x) = \sqrt{2}\sin(2n-1)\pi x, \qquad u_{2n}^{(0)}(x) = \sqrt{2}\cos(2n-1)\pi x, \qquad \ldots. \tag{2.97}$$

Знов кожне власне значення є двохкратним. Власні функції утворюють ортонормальний базис в класі антиперіодичних функцій.

Рекурентна послідовність задач для визначення членів рядів

$$\lambda_n(q(\cdot)) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_n^{(j)}(0), u_n(x, q(\cdot)) = \sum_{j=0}^{\infty} u_n^{(j)}(x, 0) \tag{2.98}$$

є наступною

$$\frac{d^2u_{2n-1}^{(j+1)}(x)}{dx^2}+(2n-1)^2\pi^2u_{2n-1}^{(j+1)}(x)=-\sum_{s=0}^{j}\lambda_{2n-1}^{(j+1-s)}u_{2n-1}^{(s)}(x)+q(x)u_{2n-1}^{(j)}(x)$$
$$\equiv -F_{2n-1}^{(j+1)}(x),\qquad x\in(0,1), \tag{2.99}$$
$$u_{2n-1}^{(j+1)}(0)=-u_{2n-1}^{(j+1)}(1),\qquad \frac{du_{2n-1}^{(j+1)}(0)}{dx}=-\frac{du_{2n-1}^{(j+1)}(1)}{dx},$$

$$\frac{d^2u_{2n}^{(j+1)}(x)}{dx^2}+(2n-1)^2\pi^2u_{2n}^{(j+1)}(x)=-\sum_{s=0}^{j}\lambda_{2n}^{(j+1-s)}u_{2n}^{(s)}(x)+q\,(x)\,u_{2n}^{(j)}(x)$$
$$\equiv -F_{2n}^{(j+1)}(x),\qquad x\in(0,1), \tag{2.100}$$
$$u_{2n}^{(j+1)}(0)=-u_{2n}^{(j+1)}(1),\qquad \frac{du_{2n}^{(j+1)}(0)}{dx}=-\frac{du_{2n}^{(j+1)}(1)}{dx}.$$

Для розв'язності задач (2.99) і (2.100) необхідно, щоб праві частини $F_{2n-1}^{(j+1)}(x)$ і $F_{2n}^{(j+1)}(x)$ були ортогональні функціям $u_{2n-1}^{(0)}(x)$ та $u_{2n}^{(0)}(x)$. Якщо взяти умову нормування

$$\int_0^1 u_n^{(j)}(x)u_n^{(0)}(x)\,dx=\delta_{0j},\qquad j=0,1,\ldots, \tag{2.101}$$

тоді одержуємо

$$\lambda_{2n-1}^{(j+1)}=\int_0^1 q\,(x)\,u_{2n-1}^{(j)}(x)u_{2n-1}^{(0)}(x)\,dx$$

з

$$\int_0^1 F_{2n-1}^{(j+1)}(x)u_{2n-1}^{(0)}(x)\,dx=0, \tag{2.102}$$

та

$$\lambda_{2n}^{(j+1)}=\int_0^1 q(x)u_{2n}^{(j)}(x)u_{2n}^{(0)}(x)\,dx$$

з

$$\int_0^1 F_{2n}^{(j+1)}(x)u_{2n}^{(0)}(x)\,dx=0. \tag{2.103}$$

Оскільки функція $u_{2n-1}^{(0)}(x)=\sqrt{2}\sin(2n-1)\pi x$ є парною відносно точки $x=\frac{1}{2}$, то і функція $F_{2n-1}^{(j+1)}(x)$ буде такою ж. Аналогічно, оскільки функція $u_{2n}^{(0)}(x)=\sqrt{2}\cos(2n-1)\pi x$ є непарною відносно точки $x=\frac{1}{2}$, то і функція $F_{2n}^{(j+1)}(x)$ буде такою ж. Отже

$$\int_0^1 F_{2n-1}^{(j+1)}(x)u_{2n}^{(0)}(x)\,dx=0,$$

та

$$\int_0^1 F_{2n}^{(j+1)}(x)u_{2n-1}^{(0)}(x)\,dx=0,$$

тобто будуть виконані всі умови, необхідні для розв'язності задач (2.99), (2.100).

Розв'язки задач (2.99), (2.100) подаються у вигляді

$$u_{2n-1}^{(j+1)}(x)=-\sum_{\substack{p=0\\ p\neq 2n-1,2n}}^{\infty}\frac{\left(F_{2n-1}^{(j+1)},u_p^{(0)}\right)}{\lambda_p^{(0)}-\lambda_{2n-1}^{(0)}}u_p^{(0)}(x),$$

та

$$u_{2n}^{(j+1)}(x) = -\sum_{\substack{p=0\\p\neq 2n-1,2n}}^{\infty} \frac{\left(F_{2n}^{(j+1)}, u_p^{(0)}\right)}{\lambda_p^{(0)} - \lambda_{2n}^{(0)}} u_p^{(0)}(x).$$

Далі ідуть такі ж міркування як і у підрозділі 1.1, що доводить наступне твердження

Теорема 6. *Нехай* $q(x) = q(1-x)$ *і вибрано нормування згідно* (2.101). *Тоді, якщо виконується умова*

$$\begin{gathered} r_{2n-1}^{(0)} = r_{2n}^{(0)} = \frac{\|q\|_\infty}{8\pi^2(n-1)} < 1, \qquad n = 2,3,\dots, \\ r_1^{(0)} = r_2^{(0)} = \frac{\|q\|_\infty}{8\pi^2} < 1, \qquad n = 1, \end{gathered} \tag{2.104}$$

то розв'язок задачі (2.95) *представляється у вигляді рядів* (2.98), *які збігаються не повільніше ніж геометрична прогресія, і точність FD-методу оцінюється за формулами*

$$\left|\lambda_n(q(\cdot)) - \overset{m}{\lambda}_n(0)\right| \leqslant \|q\|_\infty \frac{r_n^m}{1-r_n}\alpha_m,$$

$$\left\|u_n(x,q(\cdot)) - \overset{m}{u}_n(x,0)\right\|_0 \leqslant \frac{r_n^{m+1}}{1-r_n}\alpha_{m+1}.$$

Якщо функція $q(x)$ не є парною на $[0,1]$, тоді власну функцію базової задачі (2.96), що відповідає власному значенню $\lambda_n^{(0)} = (2n-1)^2\pi^2$, представляємо у вигляді

$$\begin{gathered} u_n^{(0)}(x) = a_n^{(0)}\sqrt{2}\sin(2n-1)\pi x + b_n^{(0)}\sqrt{2}\cos(2n-1)\pi x, \\ \left[a_n^{(0)}\right]^2 + \left[b_n^{(0)}\right]^2 = 1. \end{gathered} \tag{2.105}$$

Для того, щоб задачі (2.99) і (2.100) при $j = 0$ мали розв'язок, необхідно і достатньо щоб виконувались умови

$$\begin{gathered} \int_0^1 F_n^{(1)}(x)\sin(2n-1)\pi x\,dx = 0, \\ \int_0^1 F_n^{(1)}(x)\cos(2n-1)\pi x\,dx = 0, \end{gathered} \tag{2.106}$$

які приводять до наступної системи рівнянь

$$\begin{gathered} \left[\lambda_n^{(1)} - \int_0^1 (1-\cos 2(2n-1)\pi x)\,q(x)\,dx\right] a_n^{(0)} - \int_0^1 q(x)\sin 2(2n-1)\pi x\,dx b_n^{(0)} = 0, \\ -\int_0^1 q(x)\sin 2(2n-1)\pi x\,dx a_n^{(0)} + \left[\lambda_n^{(1)} - \int_0^1 (1+\cos 2(2n-1)\pi x)q(x)\,dx\right] b_n^{(0)} = 0. \end{gathered} \tag{2.107}$$

Однорідна система (2.107) буде мати нетривіальний розв'язок тоді і тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю, що може бути тільки коли

$$\begin{aligned} \lambda_n^{(1)\pm} &= \int_0^1 q(x)\,dx \\ &\pm \left\{\left[\int_0^1 q(x)\cos 2(2n-1)\pi x\,dx\right]^2 + \left[\int_0^1 q(x)\sin 2(2n-1)\pi x\,dx\right]^2\right\}^{1/2} \end{aligned} \tag{2.108}$$

З урахуванням (2.105)–(2.108) одержуємо

$$\left[a_n^{(0)\pm}\right]^2 = \frac{\left[\int_0^1 q(x)\sin 2(2n-1)\pi x\,dx\right]^2}{\pm 2q_n\lambda_n^{(1)\mp}},$$

$$b_n^{(0)\pm} = \frac{\lambda_n^{(1)\pm} - \int_0^1 q(x)\left(1-\cos 2\left(2n-1\right)\pi x\right)\,dx}{\int_0^1 q\left(x\right)\sin 2(2n-1)\pi x\,dx},$$

де

$$q_n = \left\{\left[\int_0^1 q\left(x\right)\cos 2(2n-1)\pi x\,dx\right]^2 + \left[\int_0^1 q(x)\sin 2\left(2n-1\right)\pi x\,dx\right]^2\right\}^{1/2}.$$

Далі записуємо розв'язок j-ої задачі (2.99), (2.100):

$$u_n^{(j)\pm}(x) = \int_x^1 \frac{\sin(2n-1)\pi(x-3)}{(2n-1)\pi}F_n^{(j)\pm}(\xi)\,d\xi$$
$$+ a_n^{(j)\pm}\sqrt{2}\sin(2n-1)\pi x + b_n^{(j)\pm}\sqrt{2}\cos(2n-1)\pi x.$$

Одну з умов, за якими будуть визначатися $a_n^{(j)\pm}$ і $b_n^{(j)\pm}$, візьмемо у вигляді

$$\left[a_n^{(j)\pm}\right]^2 + \left[b_n^{(j)\pm}\right]^2 = \left[\int_0^1 u_n^{(0)\pm}(x)\int_x^1 \frac{\sin(2n-1)\pi(x-3)}{(2n-1)\pi}F_n^{(j)\pm}(\xi)\,d\xi\,dx\right]^2. \quad (2.109)$$

Друга умова одержується з (2.106), що приводить до системи

$$\left[\lambda_n^{(1)\pm} - \int_0^1 \left(1-\cos 2(2n-1)\pi x\right)q(x)\,dx\right]a_n^{(j)\pm} - \int_0^1 q(x)\sin 2(2n-1)\pi x\,dx b_n^{(j)\pm}$$
$$= c_n^{(j)\pm},$$
$$-\int_0^1 q(x)\sin 2(2n-1)\pi x\,dx a_n^{(j)\pm} + \left[\lambda_n^{(1)\pm} - \int_0^1 \left(1+\cos 2(2n-1)\pi x\right)q(x)\,dx\right]b_n^{(j)\pm}$$
$$= d_n^{(j)\pm},$$
$$j = 1,2,\ldots, \quad (2.110)$$

де

$$c_n^{(j)\pm} = -\int_0^1 \sqrt{2}\sin(2n-1)\pi x\left[\lambda_n^{(1)\pm} - q(x)\right]\int_x^1 \frac{\sin(2n-1)\pi(x-\xi)}{(2n-1)\pi}F_n^{(j)\pm}(\xi)\,d\xi\,dx$$
$$-\int_0^1 \sqrt{2}\sin(2n-1)\pi x\sum_{p=0}^{j-1}\lambda_n^{(j+1-p)\pm}u_n^{(p)\pm}(x)\,dx,$$

та

$$d_n^{(j)\pm} = -\int_0^1 \sqrt{2}\cos(2n-1)\pi x\left[\lambda_n^{(1)\pm} - q(x)\right]\int_x^1 \frac{\sin(2n-1)\pi(x-\xi)}{(2n-1)\pi}F_n^{(j)\pm}(\xi)\,d\xi\,dx$$
$$-\int_0^1 \sqrt{2}\cos(2n-1)\pi x\sum_{p=0}^{j-1}\lambda_n^{(j+1-p)\pm}u_n^{(p)\pm}(x)\,dx.$$

Вироджена система (2.110) матиме розв'язок за умови

$$a_n^{(0)\pm}c_n^{(j)\pm} + b_n^{(0)\pm}d_n^{(j)\pm} = 0,$$

що приводить до співвідношення

$$\lambda_n^{(j+1)\pm} = -\sum_{s=1}^{j} \int_0^1 u_n^{(0)\pm}(\xi) u_n^{(s)\pm}(\xi)\, d\xi \lambda_n^{(j+1-s)} + \int_0^1 q(\xi) u_n^{(j)\pm}(\xi) u_n^{(0)\pm}(\xi)\, d\xi.$$

Має місце

Теорема 7. *Нехай вибрана умова нормування* (2.109). *Якщо виконується умова*

$$\beta_n^0 \equiv \frac{2\left\|q\right\|_\infty (3+\sqrt{8})}{\pi(2n-1)} < 1, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{2.111}$$

і система рівнянь (2.109), (2.110) *має розв'язок, тоді FD-метод для задачі* (2.95) *є експоненційно збіжним і мають місце наступні явні оцінки його точності*

$$\left. \begin{array}{r} \left|\lambda_{2n-1} - \lambda_n{}^{m^-}\right| \\ \left|\lambda_{2n} - \lambda_n{}^{m^+}\right| \end{array} \right\} \leqslant \beta_n^m \frac{\|q\|_\infty}{1-\beta_n} \frac{1}{2} \frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!!}, \tag{2.112}$$

$$\left. \begin{array}{r} \left\|u_{2n-1}(x) - u_n{}^{m^-}(x)\right\| \\ \left\|u_{2n}(x) - u_n{}^{m^+}(x)\right\| \end{array} \right\} \leqslant \beta_n^{m+1} \frac{1}{1-\beta_n} \frac{1}{2} \frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!!}. \tag{2.113}$$

Доведення здійснюється аналогічно випадку періодичних крайових умов. Якщо умова (2.111) не виконується, тоді збіжності FD-методу можна завжди домогтися за рахунок відповідного наближення $q(x)$ кусково-сталою функцією $\bar{q}(x)$. Тоді приходимо до необхідності знаходження розв'язків наступної рекурентної послідовності задач

$$\begin{gathered} \frac{d^2 u_n^{(j+1)}(x)}{dx^2} + \left[\lambda_n^{(0)} - \bar{q}(x)\right] u_n^{(j+1)}(x) = -\sum_{s=0}^{j} \lambda_n^{(j+1-s)} u_n^{(s)}(x) + [q(x) - \bar{q}(x)]\, u_n^{(j)}(x) \\ \equiv -F_n^{(j+1)}(x), \qquad x \in (0,1), \\ u_n^{(j+1)}(0) = -u_n^{(j+1)}(1), \qquad \frac{du_n^{(j+1)}(0)}{dx} = -\frac{du_n^{(j+1)}(1)}{dx}, \end{gathered} \tag{2.114}$$

з базовою задачею

$$\begin{gathered} \frac{d^2 u_n^{(0)}(x)}{dx^2} + \left[\lambda_n^{(0)} - \bar{q}(x)\right] u_n^{(0)}(x) = 0, \qquad x \in (0,1), \\ u_n^{(0)}(0) = -u_n^{(0)}(1), \qquad \frac{du_n^{(0)}(0)}{dx} = -\frac{du_n^{(0)}(1)}{dx}, \end{gathered} \tag{2.115}$$

З умов розв'язності задач (2.114) одержуємо співвідношення

$$\lambda_n^{(j+1)} = -\sum_{s=1}^{j} \lambda_n^{(j+1-s)} \int_0^1 u_n^{(0)}(x) u_n^{(s)}(x)\, dx + \int_0^1 [q(x) - \bar{q}(x)]\, u_n^{(j)}(x) u_n^{(0)}(x)\, dx. \tag{2.116}$$

Далі для одержання оцінок для $\lambda_n^{(j)}$ і $u_n^{(j)}$ діємо аналогічно випадку періодичних умов. Тоді для розв'язку задачі (2.114) одержуємо представлення

$$\begin{aligned} u_n^{(j+1)}(x) = &\frac{\sin(2n-1)\pi x}{(2n-1)\pi} u_n'(0) + \cos(2n-1)\pi x u_n(0) \\ &- \int_0^x \frac{\sin(2n-1)\pi(x-\xi)}{(2n-1)\pi} \left[\lambda_n^{(0)} - (2n-1)^2\pi^2 - \bar{q}(\xi)\right] u_n^{(j+1)}(\xi)\, d\xi \\ &- \int_0^x \frac{\sin(2n-1)\pi(x-\xi)}{(2n-1)\pi} F_n^{(j+1)}(\xi)\, d\xi. \end{aligned} \tag{2.117}$$

Для виділення з (2.117) єдиного розв'язку задачі (2.114) накладемо наступну умову нормування

$$\begin{aligned} &\left|u_n^{(j+1)}(0)\right| + \frac{1}{(2n-1)\pi}\left|\frac{du_n^{(j+1)}(0)}{dx}\right| \\ &= \frac{1}{(2n-1)\pi}\sqrt{\frac{1+1/(2\,(2n-1)\,\pi)}{2}}\left\|F_n^{(j+1)}\right\|. \end{aligned} \tag{2.118}$$

Тоді з (2.117), (2.118) з використанням леми Гронуолла одержуємо

$$\left\|u_n^{(j+1)}(x)\right\| \leqslant M_n \left\|F_n^{(j+1)}\right\|, \tag{2.119}$$

де

$$M_n = \frac{2}{\pi(2n-1)}\sqrt{1+\frac{1}{2\pi(2n-1)}}\exp\left[\frac{2\|q\|_\infty}{\pi^2(2n-1)^2}\left(1+\frac{1}{2\pi(2n-1)}\right)\right]. \tag{2.120}$$

Продовження одержання оцінок для $\lambda_n^{(j)}$ та $u_n^{(j)}$ здійснюється таким самим чином, як це було зроблено для періодичного випадку.

Таким чином, переконуємось у справедливості твердження

Теорема 8. *Нехай нормування $u_n^{(j+1)}(x)$ здійснюється за правилом* (2.118). *Якщо виконується умова*

$$\beta_n = 2\left(3+\sqrt{8}\right) M_n \|q-\bar{q}\|_\infty < 1,$$

де M_n визначається з (2.120), *тоді розв'язок задачі* (2.95) *представляється за допомогою FD-методу у вигляді рядів* (2.98), *які збігаються із швидкістю не повільніше ніж геометрична прогресія із знаменником β_n, і мають місце наступні явні оцінки його точності*

$$\left|\lambda_n - \overset{m}{\lambda}_n\right| \leqslant \|q-\bar{q}\|_\infty \frac{3+\sqrt{8}}{2}\frac{\beta_n^m}{1-\beta_n}\frac{1}{2}\frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!!},$$

$$\left\|u_n(x) - \overset{m}{u}_n(x)\right\| \leqslant \frac{\beta_n^{m+1}}{1-\beta_n}\frac{1}{2}\frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!!},$$

тобто FD-метод є експоненційно збіжним.

Доведені теореми 6 і 7 дають достатні умови збіжності некласичних асимптотичних розвинень для розв'язків задачі (2.95), а теорема 8 — узагальнених некласичних асимптотичних розвинень.

Алгоритмічну реалізацію FD-методу будуємо на основі теорії точних трьохточкових різницевих схем О. А. Самарського, А. М. Тихонова, яка розповсюджена на задачі Штурма–Ліувілля В. Г. Приказчиковим.

На нерівномірній сітці $\hat{\omega}$ у її внутрішніх вузлах з використанням позначень підрозділу 2.1 записуємо те ж саме різницеве рівняння

$$\left(ay_{\bar{x}}^{(j+1)}\right)_{\hat{x}} - d(x)y^{(j+1)}(x) = -\varphi^{(j+1)}(x), \qquad x \in \hat{\omega}. \tag{2.121}$$

Далі треба знайти точні різницеві аналоги умов антиперіодичності. Запишемо розв'язок рівняння з (2.114) на відрізках $[0, x_1]$ і $[x_N, 1]$ через відповідні функції Гріна для умов Діріхле:

$$\begin{aligned} u_n^{(j+1)}(x) &= \frac{\mu_1(\nu_1 x)}{\mu_1(\nu_1 h_1)} u_n^{(j+1)}(x_1) + \frac{\mu_1(\nu_1(x_1 - x))}{\mu_1(\nu_1 h_1)} u_n^{(j+1)}(0) \\ &+ \int_0^{x_1} G^1(x,\xi) F_n^{(j+1)}(\xi)\, d\xi, \qquad x \in [0, x_1], \end{aligned} \tag{2.122}$$

$$G^1(x,\xi) = \mu_1^{-1}(\nu_1 h_1) \begin{cases} \mu_1(\nu_1 x)\mu_1(\nu_1(x_1 - \xi)), & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \mu_1(\nu_1 \xi)\mu_1(\nu_1(x_1 - x)), & \xi \leqslant x \leqslant x_1, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u_n^{(j+1)}(x) &= \frac{\mu_1(\nu_{N+1}(x - x_N))}{\mu_1(\nu_{N+1} h_{N+1})} u_n^{(j+1)}(1) + \frac{\mu_1(\nu_{N+1}(1 - x))}{\mu_1(\nu_{N+1} h_{N+1})} u_n^{(j+1)}(x_N) \\ &+ \int_{x_N}^{1} G^{N+1}(x,\xi) F_n^{(j+1)}(\xi)\, d\xi, \qquad x \in [x_N, 1], \end{aligned} \tag{2.123}$$

$$G^{N+1}(x,\xi) = \mu_1^{-1}(\nu_{N+1} h_{N+1}) \begin{cases} \mu_1(\nu_{N+1}(x - x_N))\,\mu_1(\nu_{N+1}(1 - \xi)), & x_N \leqslant x \leqslant \xi, \\ \mu_1(\nu_{N+1}(\xi - x_N))\,\mu_1(\nu_{N+1}(1 - x)), & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Виходячи з (2.122), (2.123), записуємо точні дискретні аналоги умов антиперіодичності

$$\begin{aligned} &u_n^{(j+1)}(0) = -u_n^{(j+1)}(1), \\ &[\mu_1(\nu_1 h_1)]^{-1}\left\{u_n^{(j+1)}(x_1) - \mu_2(\nu_1 h_1) u_n^{(j+1)}(0) + \int_0^{x_1} \mu_1(\nu_1(x_1 - \xi)) F_n^{(j+1)}(\xi)\, d\xi\right\} \\ &= -\left[\mu_1(\nu_{N+1} h_{N+1})\right]^{-1} \Big\{\mu_2(\nu_{N+1} h_{N+1})\, u_n^{(j+1)}(1) - u_n^{(j+1)}(x_N) \\ &\qquad - \int_{x_N}^{1} \mu_1(\nu_{N+1}(\xi - x_N)) F_n^{(j+1)}(\xi)\, d\xi\Big\}. \end{aligned} \tag{2.124}$$

Таким чином до різницевого рівняння (2.121) додаються умови

$$\begin{aligned} &y^{(j+1)}(0) = -y^{(j+1)}(1), \\ &[\mu_1(\nu_1 h_1)]^{-1}\left\{y^{(j+1)}(x_1) - \mu_2(\nu_1 h_1) y^{(j+1)}(0) + \int_0^{x_1} \mu_1(\nu_1(x_1 - \xi)) F_n^{(j+1)}(\xi)\, d\xi\right\} \\ &= \left[\mu_1(\nu_{N+1} h_{N+1})\right]^{-1} \Big\{-\mu_2(\nu_{N+1} h_{N+1})\, y^{(j+1)}(1) + y^{(j+1)}(x_N) \\ &\qquad + \int_{x_N}^{1} \mu_1(\nu_{N+1}(\xi - x_N)) F_n^{(j+1)}(\xi)\, d\xi\Big\}, \\ &j = 0, 1, \ldots, \end{aligned} \tag{2.125}$$

і (2.121), (2.125) утворюють точну трьохточкову схему для задачі (2.114).

Різницева схема (2.121), (2.125) є виродженою, однак вона є точною і її умови розв'язності автоматично виконуються за рахунок вибору $\lambda_n^{(j+1)}$ згідно з формулою (2.122). Будемо знаходити необхідний розв'язок цієї різницевої схеми (проекцію на сітку $u_n^{(j+1)}(x)$) наступним чином. У системі лінійних алгебраїчних рівнянь (2.121), (2.125) відкинемо передостаннє рівняння, а в першому та останньому член, що містить $y_n^{(j+1)}(x_{N+1})$, перенесемо у праву частину. Тоді одержимо невироджену систему лінійних алгебраїчних рівнянь з майже трьохдіагональною матрицею (без останнього рядка) відносно невідомих $y_n^{(j+1)}(x_i)$, $i=1,\dots,N$, яка залежить від невідомого параметра $y_n^{(j+1)}(x_{N+1})$. Пояснемо це детальніше.

Вихідна система згідно (2.121), (2.125) має вигляд

$$\frac{1}{\hbar_1}\left[a(x_2)\frac{y^{(j+1)}(x_2)-y^{(j+1)}(x_1)}{h_2}-a(x_1)\frac{y^{(j+1)}(x_1)+y^{(j+1)}(x_{N+1})}{h_1}\right]-d(x_1)y^{(j+1)}(x_1)$$
$$=-\varphi^{(j+1)}(x_1),$$

$$\frac{1}{\hbar_i}\left[a(x_{i+1})\frac{y^{(j+1)}(x_{i+1})-y^{(j+1)}(x_i)}{h_{i+1}}-a(x_i)\frac{y^{(j+1)}(x_i)-y^{(j+1)}(x_{i-1})}{h_i}\right]-d(x_i)y^{(j+1)}(x_i)$$
$$=-\varphi^{(j+1)}(x_i),\qquad i=2,\dots,N, \tag{2.126}$$

$$\begin{aligned}&\frac{a(x_1)}{h_1}\left[y^{(j+1)}(x_1)+\mu_2(\nu_1h_1)y^{(j+1)}(1)\right]\\&\quad+\frac{a(x_{N+1})}{h_{N+1}}\left[\mu_2\left(\nu_{N+1}h_{N+1}\right)y^{(j+1)}(1)-y^{(j+1)}(x_N)\right]\\&\quad=-\frac{a(x_1)}{h_1}\int_0^{x_1}\mu_1\left(\nu_1(x_1-\xi)\right)F_n^{(j+1)}(\xi)\,d\xi\\&\quad+\frac{a\left(x_{N+1}\right)}{h_{N+1}}\int_{x_N}^1\mu_1\left(\nu_{N+1}(\xi-x_N)\right)F_n^{(j+1)}(\xi)\,d\xi.\end{aligned}$$

Після зазначеної вище процедури вона перетворюється до вигляду

$$\frac{1}{\hbar_1}\left[a(x_2)\frac{y^{(j+1)}(x_2)-y^{(j+1)}(x_1)}{h_2}-a(x_1)\frac{y^{(j+1)}\left(x_1\right)}{h_1}\right]-d(x_1)y^{(j+1)}(x_1)$$
$$=-\varphi^{(j+1)}(x_1)+\frac{a(x_1)}{\hbar_1h_1}y^{(j+1)}\left(x_{N+1}\right),$$

$$\frac{1}{\hbar_i}\left[a\left(x_{i+1}\right)\frac{y^{(j+1)}(x_{i+1})-y^{(j+1)}(x_i)}{h_{i+1}}-a(x_i)\frac{y^{(j+1)}(x_i)-y^{(j+1)}(x_{i-1})}{h_i}\right]-d(x_i)y^{(j+1)}(x_i)$$
$$=-\varphi^{(j+1)}(x_i),\qquad i=2,\dots,N-1, \tag{2.127}$$

$$\begin{aligned}&\frac{a(x_1)}{h_1}y^{(j+1)}(x_1)-\frac{a\left(x_{N+1}\right)}{h_{N+1}}y^{(j+1)}(x_N)\\&\quad=-\left[\frac{a(x_1)}{h_1}\mu_2(\nu_1h_1)+\frac{a(x_{N+1})}{h_{N+1}}\mu_2\left(\nu_{N+1}h_{N+1}\right)\right]y^{(j+1)}(1)\\&\quad-\frac{a(x_1)}{h_1}\int_0^{x_1}\mu_1(\nu_1(x_1-\xi))F_n^{(j+1)}(\xi)\,d\xi\\&\quad+\frac{a\left(x_{N+1}\right)}{h_{N+1}}\int_{x_N}^1\mu_1\left(\nu_{N+1}\left(\xi-x_N\right)\right)F_n^{(j+1)}(\xi)\,d\xi.\end{aligned}$$

Після розв'язання системи (2.127) (яка є невиродженою згідно припущення, що всі $\lambda_n^{(0)}$ є простими власними значеннями базової задачі, хоча це припущення не є суттєвим) методом прогонки, здійснюємо відновлення точного розв'язку неперервної задачі (2.114) за правилом

$$u_n^{(j+1)}(x) = \left[\mu_1(\nu_i h_i)\right]^{-1}\left[\mu_1(\nu_i(x - x_{i-1}))\, y^{(j+1)}(x_i) + \mu_1(\nu_i(x_i - x))\, y^{(j+1)}(x_{i-1})\right] + \int_{x_{i-1}}^{x_i} G^i(x,\xi) F_n^{(j+1)}(\xi)\, d\xi, \qquad x \in [x_{i-1}, x_i],\ i = 1, \ldots, N+1, \tag{2.128}$$

де

$$G^i(x,\xi) = \mu_1^{-1}(\nu_i h_i) \begin{cases} \mu_1(\nu_i(x - x_{i-1}))\, \mu_1(\nu_i(x_i - \xi)), & x_{i-1} \leqslant x \leqslant \xi, \\ \mu_1(\nu_i(\xi - x_{i-1}))\, \mu_1(\nu_i(x_i - x)), & \xi \leqslant x \leqslant x_i. \end{cases}$$

А невідоме $y^{(j+1)}(x_{N+1})$ знаходимо з умови нормування (2.118)

$$\begin{aligned} &\left|y^{(j+1)}(1)\right| \\ &\quad + \frac{1}{(2n-1)\pi}\left|\frac{a(x_{N+1})}{h_{N+1}}\right| \\ &\quad \times \left|y^{(j+1)}(x_N) - \mu_2(\nu_{N+1} h_{N+1})\, y^{(j+1)}(1) + \int_{x_N}^{1} \mu_1(\nu_{N+1}(\xi - x_N))\, F_n^{(j+1)}(\xi)\, d\xi\right| \\ &= \frac{1}{(2n-1)\pi}\sqrt{\frac{1 - 1/(2(2n-1)\pi)}{2}}\left\|F_n^{(j+1)}\right\|. \end{aligned} \tag{2.129}$$

Рекурентний процес (2.127)–(2.129) повторюємо по j від 0 до $m-1$. Початкові умови для нього визначаються наступним чином. Спочатку розв'язуємо однорідну систему (2.121), (2.125) при $j = -1$, $\varphi^{(0)}(x) \equiv 0$ і $F_n^{(0)}(\xi) \equiv 0$, яка має нетривіальний розв'язок, оскільки її визначник $\Delta_N(\lambda^{(0)}(\bar{q}(\cdot)))$ дорівнює нулю, тобто

$$\begin{aligned} &\Delta_N\left(\lambda^{(0)}\right) \\ &= \begin{vmatrix} \left\{-\left(\frac{a(x_2)}{h_2} + \frac{a(x_1)}{h_1}\right) - \hbar_1 d(x_1)\right\} & \frac{a(x_2)}{h_2} & 0 & 0 \ldots 0 & -\frac{a(x_1)}{h_1} \\ \frac{a(x_2)}{h_2} & \left\{-\left(\frac{a(x_3)}{h_3} + \frac{a(x_2)}{h_2}\right) - \hbar_2 d(x_2)\right\} & \frac{a(x_3)}{h_3} & 0 \ldots 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0\ 0 \ldots 0 & \frac{a(x_N)}{h_N} & \left\{-\left(\frac{a(x_{N+1})}{h_{N+1}} + \frac{a(x_N)}{h_N}\right) - \hbar_N d(x_N)\right\} & & \frac{a(x_{N+1})}{h_{N+1}} \\ -\frac{a(x_1)}{h_1} & 0 \ldots 0 & \frac{a(x_{N+1})}{h_{N+1}} & & \left\{-\frac{a(x_1)}{h_1}\mu_2(\nu_1 h_1) - \frac{a(x_{N+1})}{h_{N+1}}\mu_2(\nu_{N+1} h_{N+1})\right\} \end{vmatrix} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.130}$$

Для знаходження нулів $\lambda^{(0)}(\bar{q}(\cdot))$, $n = 1, 2, \ldots$, рівняння (2.130) можна скористатися двосторонніми оцінками

$$\pi^2(2n-1)^2 + q_{\min} \leqslant \lambda_n^{(0)}(\bar{q}(\cdot)) \leqslant \pi^2(2n-1)^2 + q_{\max}, \tag{2.131}$$

де

$$q_{\min} = \min_{x\in[0,1]} q(x), \qquad q_{\max} = \max_{x\in[0,1]} q(x).$$

Знайдемо таке N_0, починаючи з якого для всіх $n \geqslant N_0$ відрізки (2.131), що містять (2.130), не перетинаються, тобто виконується нерівність

$$\pi^2(2n-1)^2 + q_{\max} \leqslant \pi^2 (2n+1)^2 + q_{\min}, \qquad n \geqslant N_0.$$

Звідси

$$N_0 = \left\lceil \frac{q_{\max} - q_{\min}}{8\pi^2} \right\rceil,$$

де $\lceil a \rceil$ — найменше ціле, що більше або дорівнює a. Найбільш просто знаходяться корені рівняння (2.130), коли

$$q_{\max} - q_{\min} \leqslant 8\pi^2, \tag{2.132}$$

бо в цьому випадку всі корені розділяються і їх можна знайти методом бісекції. Якщо умова (2.132) не виконується, то знаходження перших $N-1$-го кореня рівняння (2.130) можна здійснити щляхом табулювання значень визначника $\Delta_N\left(\lambda^{(0)}\right)$ з певним кроком і знаходження сусідніх точок, де він змінює знак.

Після цього знаходимо $y^{(0)}(x)$ і відновлюємо $u^{(0)}(x)$.

Література

1. К. И. Бабенко, *Основы численного анализа*, “Наука”, Москва, 1986.
2. К. И. Бабенко, *Об одном численном алгоритме решения задачи на собственные значения для линейных дифференциальных операторов*, Препр. АН СССР. ИПМ **46** (1978).
3. I. Babuska, A. K. Aziz, *Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations*, Academic Press, New York, 1972, стор. 3–359.
4. J. H. Bramble, J. E. Osborn, *Rate of convergence estimates for nonselfadjoint eigenvalue approximations*, Mathematical Computation **27** (1973), 525–549.
5. J. E. Osborn, *Spectral approximation for compact operators*, Technical Report 74–26, Department of Mathematics, University of Maryland, College Park, 1974.
6. A. L. Andrew, *Computation of higher Sturm-Liouville eigenvalues*, Congressus Numeratium (D. S. Meek and van G. H. J. Rees, eds.), vol. 34, 1982, pp. 3–16.
7. A. L. Andrew, F. R. de Hoog, P. I. Robb, *Leighton's bounds for Sturm–Liouville eigenvalues*, J. Math. Anal. Appl. **83** (1981), 11–19.
8. J. W. Paine, A. L. Andrew, *Bounds and higher-order estimates for Sturm-Liouville eigenvalues*, J. Math. Anal. Appl. **96** (1983), 388–394.
9. A. L. Andrew, *Asymptotic correction of computed eigenvalues of differential equations*, Annals of Numerical Mathematics **1** (1994), 41–51.
10. J. D. Pryce, *Numerical solution of Sturm–Liouville problems*, Clarendon Press, Oxford, New York, Tokyo, 1993.
11. В. Г. Приказчиков, *Однородные разностные схемы 4-го порядка точности для задач Штурма–Лиувилля*, Вычислительные методы и программирование **3** (1965), Москва, 232–236.
12. В. Г. Приказчиков, *Главный член разложения погрешности собственных значений дискретного аналога эллиптического оператора*, ЖВМ и МФ **32** (1992), 1671–1676.
13. В. Г. Приказчиков, *Однородные разностные схемы высокого порядка точности для задач Штурма–Лиувилля*, ЖВМ и МФ **9** (1969), № 2, 315–336.
14. S. H. Gould, *Variational methods for eigenvalue problems*, Oxford University Press, London, 1966.
15. A. Weinstein, *The intermediate problems and the maximum–minimum theory of eigenvalues*, J. Math. Mech. **12** (1963), 235–245.
16. A. Weinstein, *On the Sturm–Liouville theory and the eigenvalues of intermediate problems*, Numer. Math. **5** (1963), 238–245.
17. І. П. Гаврилюк, В. Л. Макаров, *Методи обчислень*, т. I, “Вища школа”, Київ, 1996.
18. И. П. Гаврилюк, В. Л. Макаров, *О построении наилучших схем с точным спектром*, ДАН УССР **12** (1975), 1078–1081.
19. И. П. Гаврилюк, В. М. Лужных, В. Л. Макаров, *Разностный метод решения задачи Штурма–Лиувилля с вырождением на границе. I*, Вычислительная и прикладная математика **40** (1980), 103–112.

20. И. П. Гаврилюк, В. М. Лужных, В. Л. Макаров, *Разностный метод решения задачи Штурма–Лиувилля с вырождением на границе. II*, Вычислительная и прикладная математика **41** (1980), 31–39.
21. В. Л. Макаров, *О функционально-разностном методе произвольного порядка точности решения задачи Штурма–Лиувилля с кусочно-гладкими коэффициентами*, ДАН СССР **320** (1991), № 1, 34–39.
22. V. L. Makarov, O. L. Ukhanev, *FD-method for Sturm–Liouville Problems. Exponential Rate of Convergence*, Tbilisi University Press **2** (1997), 1–19.
23. Б. И. Бандырский, В. Л. Макаров, О. Л. Уханев, *Достаточные условия сходимости неклассических асимптотических разложений для задачи Штурма–Лиувилля с периодическими условиями*, Дифференциальные уравнения **35** (1999), № 3, Минск, 267–278.
24. В. Л. Макаров, С. О. Гочева, *О методе сеток для задачи Штурма–Лиувилля с обобщенным дифференциальным оператором Эрмита*, Дифференциальные уравнения **7** (1981), Минск, 1239–1249.
25. В. Л. Макаров, *О функционально-дискретном подходе к решению задач математической физики*, Труды семинара имени И. Н. Векуа (1993), Тбилиси, 44–51.
26. В. Л. Макаров, *FD-метод: экспоненциальная скорость сходимости*, Обчислювальна та прикладна математика **2 (82)** (1997), 71–74.
27. М. К. Гавурин, *Об оценках для собственных чисел и векторов возмущенного оператора*, ДАН СССР **76** (1951), № 6, 769–770.
28. H.-O. Kreiss, *Difference approximations for boundary and eigenvalue problems for ODE*, Mathematica of Computation **26** (1972), № 119, 605–624.
29. Г. Стренг, Дж. Фикс, *Теория метода конечных элементов*, "Мир", Москва, 1977.
30. G. J. Fix, *On the effects of quadrature in the finite element method*, Advances in computational methods in structural mechanics and design (J. T. Oden, R. W. Clough, Y. Yamamoto, eds.), Huntsvill, 1972, pp. 55–68.
31. G. J. Fix, *Eigenvalue approximation by the finite method*, Advances in Math. **10** (1973), 300–316.
32. Quarteroni A. Valli, *Numerical approximation of partial differential equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
33. Г. И. Марчук, В. В. Шайдуров, *Повышение точности решений разностных схем*, "Наука", Москва, 1979.
34. В. В. Шайдуров, *О решении спектральной вариационно-разностной задачи на последовательности сеток*, Вариационно-разностные методы в математической физике (1984), Москва, 149–160.
35. Л. Коллатц, *Задачи на собственные значения с техническими приложениями*, "Мир", Москва, 1968.
36. А. А. Самарский, Е. С. Николаев, *Методы решения сеточных уравнений*, "Наука", Москва, 1978.
37. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Об однородных разностных схемах*, ДАН СССР **122** (1958), № 4, 562–565.
38. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Разностная задача Штурма–Лиувилля*, ЖВМ и МФ **1** (1961), № 5, 784–805.
39. G. Fichera, *Numerical and Quantitive Analysis*, Pitman, London, 1978, стор. 84–88.
40. J. W. Paine, *Numerical approximation of Sturm–Liouville eigenvalues*, Ph. D. thesis, Australian National Univ., 1979.
41. J. W. Paine, F. de Hoog, *Uniform estimation of the eigenvalues of Sturm–Liouville problems*, J. Austral. Math. Soc. **Ser. B 21** (1980), 365–383.
42. L. F. Shampine, G. Kraut, *Uniformly accurate Sturm–Liouville eigenvalues*, Computing **47** (1992), 378–385.
43. J. W. Paine, F. R. de Hoog, R. S. Anderssen, *On the correction of finite difference eigenvalue approximations for Sturm–Liouville problems*, Computing **26** (1981), 123–129.
44. A. L. Andrew, J. W. Paine, *Correction of Numerov's eigenvalue estimates*, Numer. Math. **47** (1985), 289–300.
45. A. L. Andrew, *Efficient computation of higher Sturm–Liouville eigenvalues*, Numerical Mathematics **86** (1988), Singapore, 1–9.
46. R. S. Anderssen F. R. de Hoog, *On the correction of finite difference eigenvalue approximations for Sturm–Liouville problems with general boundary conditions*, BIT **24** (1984), 401–412.
47. A. L. Andrew, *Correction of finite difference eigenvalues of periodic Sturm–Liouville problems*, J. Austral. Math. Soc. **Ser. B. 39** (1989), 460–469.
48. A. L. Andrew, *The accuracy of Numerov's method for eigenvalues*, BIT **26** (1986), 251–253.

49. A. L. Andrew, J. W. Paine, *Correction of finite element estimates for Sturm–Liouville eigenvalues*, Numer. Math. **50** (1986), 205–215.
50. С. Д. Алгазин, *О локализации собственных значений замкнутых линейных операторов*, Сибирский матем. Ж. **24** (1983), № 2, 3–8.
51. С. Д. Алгазин, *О вычислении собственных значений обыкновенных дифференциальных уравнений*, ЖВМ и МФ. **35** (1994), № 4, 603–610.
52. L. G. Ixaru, *Numerical methods for differential equations and applications*, Dordrecht, Reidel, 1984.
53. S. Pruess, C. Fulton, *Mathematical software for Sturm–Liouville problems*, ACM Trans. Math. Software **19** (1993), 360–376.
54. J. W. Paine, *Correction of Sturm–Liouville eigenvalue estimates*, Math. Comp. **39** (1982), 415–420.
55. R. G. Gordon, *New method for constructing wave functions for bound states and scattering*, J. Chem. Phys. **51** (1969), 14–25.
56. L. Gr. Ixary, M. I. Cristu, M. S. Popa, *Choosing step sizes for perturbative methods to solve the Schrödinger equation*, J. Comput. Phys. **36** (1980), 170–181.
57. Gh. Adam, S. Adam, A. Corciovei, *Local and accumulated truncation errors in a class of perturbative numerical methods*, Rev. Roumaine Phys. **25** (1980), 39–53.
58. I. Dähnn, A. Kastelewicz, G. Schalm, *Zur numerischen Berechnung der Eigenwerte und Eigenfunktionen der Hillschen Differentialgleichung mit periodischen Randbedingungen*, Wiss. Z. Humboldt Univ. Berlin Math. Natur. Reiche. **28** (1979), 495–504.
59. I. Dähnn, *Anwendung eines direkten Verfahrens zur numerishen Behaudbung von selbstadjungierten, positiv definiten Eigenwertaufgaben bei linearen gewühnlichen Differentialgleichungen mit stückweise stetigen koeffizientenfunktionen*, ZAMM **62** (1982), 687–695.
60. W. Leighton, *Upper and lower bounds for eigenvalues*, J. Math. Anal. Appl. **35** (1971), 381–388.
61. S. A. Pruess, *Estimating the eigenvalues of Sturm–Liouville problems by approximating the differential equations*, Ph. D. thesis (1970), Purdue Univ.
62. Б. М. Левитан, *Обратные задачи Штурма–Лиувилля*, "Наука", Москва, 1984 240с.
63. В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения*, "Наукова Думка", Київ, 1977 322с.
64. Э. Беккенбах, Р. Беллман, *Введение в неравенства*, "Мир", Москва, 1965.
65. R. Courant, D. Gilbert, *Methods of Mathematical Physics*, vol. 1, Interscience, New York, 1953.
66. Н. Б. Киримов, Х. Р. Мамедов, *О базисности Рисса корневых функций некоторых регулярных краевых задач*, Математическме заметки **64** (1998), № 4, 558–563.
67. А. Островский, *Решение уравнений и систем уравнений*, "Иностранная литература", Москва, 1963.
68. Н. Я. Виленкин, *Комбинаторика*, "Наука", Москва, 1969.
69. Д. К. Фаддеев, Б. В. Вулих, Н. Н. Уральцева и др., *Избранные главы анализа и высшей алгебры*, Изд-во Ленингр. ун-та, Ленинград, 1981.

Державний університет "Львівська політехніка"

Інститут математики НАН України

Київський університет імені Тараса Шевченка

Надійшла 25/10/1999