Журнал обчисл. прикл. матем.
Вип. 1, 2000, стор. 76–88

J. Comput. Appl. Math.
No. 85, 2000, pp. 76–88

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ РАЗОМКНУТОЙ ГРАНИЦЫ

УДК 517.948

Р. С. ХАПКО

Резюме. Рассматривается начально-краевая задача для однородного телеграфного уравнения на плоскости в случае нулевых начальных условий и граничного условия Дирихле на заданном разомкнутом контуре. Посредством интегрального преобразования Лагерра по времени нестационарная задача редуцирована к системе граничных задач для уравнения Гельмгольца с чисто мнимым параметром. Представляя решения в виде потенциала простого слоя получена эквивалентная система интегральных уравнений первого рода. Показано существование ее решений в модифицированных пространствах Гельдера. Численное решение интегральных уравнений осуществлено методом квадратур с использованием тригонометрической интерполяции. Теоретически обоснованная экспоненциальная сходимость метода решения интегральных уравнений в случае аналитических входных данных подтверждена численными экспериментами.

1. Введение

Математическое моделирование различных физических процессов таких как теплопроводность, акустика, дифракция и других часто приводит к необходимости решения нестационарных задач в неограниченных областях. Приближенное решение задач такого типа сопряжено с рядом трудностей, наиважнейшими из которых на наш взгляд являются: неограниченность области, где ищется решение; большая размерность задачи (время присутствует как независимая переменная). Первая из перечисленных проблем делает весьма трудоемким применение в общем случае для нахождения приближенного решения таких классических численных методов как метод сеток или метод конечных элементов. В тоже время при приближенном решении стационарных задач в неограниченных областях хорошо зарекомендовал себя метод граничных интегральных уравнений, который сводит решение задачи к определению неизвестной функции на границе области [4, 11, 22, 23]. На наш взгляд возможны несколько подходов использования метода интегральных уравнений для приближенного решения нестационарных задач в неограниченных областях [8], причем все они отличаются способом устранения временной переменной. Первый из подходов состоит в непосредственной дискретизации исходной задачи методом Роте (метод горизонтальных линий). В результате получается последовательность стационарных (дискретизированных) задач в неограниченной области. Для их решения можно воспользоваться методом граничных интегральных уравнений, без привлечения объемных интегралов. Детали этого способа с доказательством сходимости приведены в [14]. Второй подход предусматривает использование интегральных представлений для решений нестационарных задач, например, в виде потенциалов. Это дает возможность редуцировать исходную задачу к гранично временному интегральному уравнению, численное решение которого можно осуществить проекционными методами. Различные аспекты такого подхода рассмотрены в [10, 15, 18]. И, наконец, третий подход применения метода интегральных уравнений состоит в использовании интегрального преобразования по временной переменной к исходной задаче. Получаемая в пространстве изображений граничная задача или система задач решается методом граничных интегральных уравнений. Наиболее часто с этой целью используется преобразование Лапласа. Однако практическое применение такого метода связано с существенными проблемами при приближенном вычислении обратного преобразования. В 1981 году В. А. Галазюк [1] предложил для понижения размерности нестационарных задач использовать преобразование Лагерра. Сущность его состоит в представлении решения в виде ряда Фурье–Лагерра, коэффициенты которого определяются из рекуррентной последовательности граничных задач для уравнения Гельмгольца с чисто мнимым параметром. Такой подход в сочетании с методом граничных элементов использовался в [5] к начально-краевым задачам для волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$; в сочетании с методом интегральных уравнений в [2] к начально-краевым задачам с осевой симметрией для телеграфного уравнения. В [13] указанный способ применен к начально-краевой задаче для телеграфного уравнения на плоскости и сделан анализ сходимости и погрешности метода приближенного решения получаемых интегральных уравнений.

Перечисленные методы применимы к нестационарным задачам с однородными начальными условиями. В случае ненулевых начальных условий наиболее целесообразным представляется использование преобразования Келли [16, 21], позволяющего редуцировать такие нестационарные задачи к последовательности стационарных.

Отдельный вопрос составляет проблема решения интегральных уравнений первого рода в случае разомкнутой границы. Наличие корневой особенности в плотности предопределяет использование в этих интегральных уравнениях специальной замены переменных, позволяющей получить уравнение с непрерывной плотностью. В [12] с этой целью использовано специальную дробно-рациональную замену, а в [20, 26] cos-преобразование. Заметим, что последняя замена дает возможность осуществить в дальнейшем и теоретические обоснования.

В данной работе мы распространяем метод преобразования Лагерра в сочетании с граничными интегральными уравнениями на случай двумерных нестационарных задач с граничным условием Дирихле на заданной незамкнутой кривой. План этой статьи следующий. В разделе 2 сделана постановка задачи, описана процедура применения преобразования Лагерра и редукция нестационарной задачи к системе граничных задач для уравнения Гельмгольца. Здесь же, с помощью потенциала простого слоя, получена рекуррентная система интегральных уравнений первого рода. Раздел 3 содержит обоснование разрешимости и численное решение интегральных уравнений. Сначала, после параметризации и cos-преобразования, получены одномерные интегральные уравнения с логарифмической особенностью в ядрах. Показана их корректность в модифицированных пространствах Гельдера. Приближенное решение осуществлено методом квадратур с использованием специальных квадратурных формул. На основании результатов в [9, 12] сформулирована теорема о сходимости и оценке погрешности. Анализ погрешности показывает, что в случае аналитических граничной функции и граничной кривой мы имеем экспоненциальную сходимость. В разделе 4 мы иллюстрируем применение предложенного метода на численных примерах.

2. Преобразование Лагерра и метод интегральных уравнений

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ разомкнутая кривая, которая имеет параметрическое представление

$$\Gamma = \{z(s)\colon -1 \le s \le 1\}, \tag{2.1}$$

причем $z\colon [-1;1] \to \mathbb{R}^2$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, $z_{-1} = z(-1)$ и $z_1 = z(1)$ концы кривой. Пусть $D = \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, $\Sigma_\infty = \Gamma \times (0;\infty)$ и $Q_\infty = D \times (0;\infty)$.

Необходимо найти ограниченную функцию $u(x,t) \in C^2(Q_\infty) \cap C(\bar{Q}_\infty)$ с ограниченными производными до второго порядка включительно, которая удовлетворяет волновому уравнению с абсорбцией (телеграфному уравнению)

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \qquad (x,t) \in Q_\infty, \tag{2.2}$$

с постоянными коэффициентами $a > 0$ и $b \geq 0$, однородным начальным условиям

$$u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \qquad x \in D, \tag{2.3}$$

и граничному условию Дирихле

$$u = F, \qquad (x,t) \in \Sigma_\infty, \tag{2.4}$$

причем для граничной функции F выполняется условие согласования

$$F(x,0) = \frac{\partial F}{\partial t}(x,0) = 0, \qquad x \in \Gamma.$$

Известно [25], что любая ограниченная функция g, определенная на $[0;\infty)$ с ограниченной на этом интервале производной, может быть представлена в виде равномерно сходящегося ряда Фурье–Лагерра

$$g = \kappa \sum_{n=0}^{\infty} g_n L_n(\kappa t), \tag{2.5}$$

где $\kappa > 0$ — фиксированный параметр, g_n — коэффициенты Фурье–Лагерра, вычисляемые по формуле

$$g_n = \int_0^\infty e^{-\kappa t} L_n(\kappa t) g(t) dt, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{2.6}$$

Представление (2.6) мы интерпретируем как прямое преобразование Лагерра функции g, а разложение (2.5) — как обратное преобразование Лагерра. Для понижения размерности поставленной нестационарной задачи применим это преобразование по временной переменной.

Теорема 2.1. *Пусть существует единственное решение $u(x,t)$ задачи (2.2)–(2.4) из класса $C^2(Q_\infty) \cap C(\bar{Q}_\infty)$ (с ограниченными первыми и вторыми производными). Тогда ряд Фурье–Лагерра*

$$u(x,t) = \kappa \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) L_n(\kappa t) \tag{2.7}$$

с коэффициентами

$$u_n(x) = \int_0^\infty e^{-\kappa t} L_n(\kappa t) u(x,t)\, dt, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.8}$$

является решением задачи (2.2)–(2.4) тогда и только тогда, когда коэффициенты Фурье–Лагерра u_n удовлетворяют системе граничных задач

$$\Delta u_n - \gamma^2 u_n = \sum_{m=0}^{n-1} \beta_{n-m} u_m, \qquad x \in D, \tag{2.9}$$

$$u_n = f_n, \qquad x \in \Gamma, \tag{2.10}$$

$$|u_n(x)| = O(1), \qquad |x| \to \infty. \tag{2.11}$$

Здесь

$$f_n(x) = \int_0^\infty e^{-\kappa t} L_n(\kappa t) F(x,t)\, dt,$$

$$\beta_n = \frac{\kappa^2}{a^2}(n+1) + \kappa b, \qquad \gamma^2 = \beta_0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Доказательство. Необходимость. Поскольку решение задачи (2.2)–(2.4) $u(x,t) \in C^2(Q_\infty) \cap C(\bar{Q}_\infty)$ и имеет ограниченные производные до второго порядка включительно то, согласно [25], имеет место разложение в равномерно сходящийся ряд Фурье–Лагерра (2.7), который можно дважды дифференцировать. После подстановки (2.7) в телеграфное уравнение получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\Delta u_n L_n(\kappa t) - \left[\frac{1}{a^2} L_n''(\kappa t) + b L_n'(\kappa t) \right] u_n \right) = 0. \tag{2.12}$$

Для полиномов Лагерра справедливы следующие рекуррентные формулы [25]

$$L_n'(z) = -\sum_{m=0}^{n-1} L_m(z), \qquad L_n''(z) = \sum_{m=0}^{n-2} (n-m-1) L_m(z).$$

Их применение в (2.12) приводит к уравнениям (2.9) для коэффициентов u_n. Условие ограниченности на бесконечности (2.11) следует из предположения об ограниченности исходного решения $u(x,t)$ в области Q_∞.

Достаточность. Пусть некоторая функция $u(x,t) \in C^2(Q_\infty) \cap C(\bar{Q}_\infty)$ имеет ограниченные производные до второго порядка включительно и разложение в ряд Фурье–Лагерра (2.7) с коэффициентами (2.8). Поскольку

$$|\Delta u(x,t) \exp\{-\kappa t\} L_n(\kappa t)| \le C \exp\{-\kappa t/2\}, \qquad x \in D,\ t \ge 0,$$

то интеграл

$$\int_0^\infty e^{-\kappa t} L_n(\kappa t) \Delta u(x,t)\, dt$$

сходится равномерно относительно x и, следовательно, можно дважды дифференцировать по параметрам x_1 и x_2 под знаком интеграла в (2.8). В результате получим

$$\Delta u_n(x) = \int_0^\infty e^{-\kappa t} L_n(\kappa t) \Delta u(x,t)\, dt \tag{2.13}$$

и согласно свойствам полиномов Лагерра

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n} \beta_{n-m} u_m(x) &= \kappa a^2 (n+1) u(x,0) + b u(x,0) + a^2 \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \\ &+ \int_0^\infty e^{-\kappa t} L_n(\kappa t) \left(a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + b \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right) dt \end{aligned} \tag{2.14}$$

для $n = 0, 1, 2, \ldots$ и $x \in D$. Учитывая теперь, что коэффициенты u_n являются решениями последовательности уравнений (2.9), с (2.13) и (2.14) имеем

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-\kappa t} L_n(\kappa t) \left(a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - b \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) \right) dt \\ &= a^2 \kappa (n+1) u(x,0) + b u(x,0) + a^2 \frac{\partial u}{\partial t}(x,0). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Теперь согласно [25] функция

$$v(x,t) = \Delta u(x,t) - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - b \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$$

допускает разложение в ряд Фурье–Лагерра по переменной t, а поэтому выполняется необходимое условие его сходимости

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n^2(x) < \infty \quad \text{для } x \in D,$$

где v_n — коэффициенты Фурье–Лагерра функции v. С другой стороны представление (2.15) означает, что это эквивалентно условию

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[a^2\kappa(n+1)u(x,0)+bu(x,0)+a^2\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\right]^2<\infty.$$

Последнее неравенство возможно только в случае

$$u(x,0)=\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0.$$

Поэтому $v(x,t)\equiv 0$ в Q_∞ и функция $u(x,t)$ удовлетворяет нестационарное уравнение (2.2) и начальные условия (2.3). Выполнение граничного условия (2.4) очевидно. □

Таким образом проблема определения решения начально–краевой задачи (2.2)–(2.4) сведена к нахождению функций $u_n\in C^2(D)\cap C(\mathbb{R}^2)$ удовлетворяющих системе граничных задач (2.9)–(2.9).

Теорема 2.2. *Система (2.9)–(2.11) имеет не более одного решения.*

Доказательство. Рассмотрим первую однородную задачу из последовательности (2.9)–(2.11)

$$\Delta u_0-\gamma^2u_0=0 \quad \text{в } D,$$
$$u_0=0 \quad \text{на } \Gamma,$$
$$|u_0(x)|=O(1), \qquad |x|\to\infty.$$

Покажем, что эта задача имеет только тривиальное решение. При этом, как и в случае замкнутой граничной кривой, воспользуемся первой формулой Грина. Однако здесь могут возникнуть определенные технические трудности вызванные тем, что функции u_n являются только непрерывными вплоть до границы, а применение формулы Грина требует их непрерывной дифференцируемости вплоть до границы. Кроме того, использование формулы Грина предвидит специальное рассмотрение концов кривой [17]. Эти трудности можно преодолеть используя идею из работы [24]. Итак будем считать заданную кривую Γ частью некоторой гладкой замкнутой кривой, которая ограничивает область G_1. Пусть ν — внешняя нормаль к границе ∂G_1, G_R — круг радиуса R, содержащий область G_1 и пусть $G_2=(\mathbb{R}^2\setminus\bar G_1)\cap G_R$. Рассмотрим функцию $u_{0,1}$ в G_1 с $\Delta u_{0,1}-\gamma^2u_{0,1}=0$ в G_1 и $u_{0,1}=0$ на Γ и функцию $u_{0,2}$ в $\mathbb{R}^2\setminus\bar G_1$ с $\Delta u_{0,2}-\gamma^2u_{0,2}=0$ в $\mathbb{R}^2\setminus\bar G_1$, $u_{0,2}=0$ на Γ, $|u_{0,2}(x)|=O(1)$, $|x|\to\infty$. Будем предполагать выполнение условий сопряжения

$$u_{0,1}=u_{0,2} \quad \text{на } \partial G_1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_{0,1}}{\partial\nu}=\frac{\partial u_{0,2}}{\partial\nu} \quad \text{на } \partial G_1\setminus\bar\Gamma.$$

После применения первой формулы Грина в G_1 для $u_{0,1}$ и в G_2 для $u_{0,2}$ получим

$$\int_{\partial G_1}u_{0,1}\frac{\partial u_{0,1}}{\partial\nu}\,ds(x)=\int_{G_1}\left[\gamma^2u_{0,1}^2+\left(\frac{\partial u_{0,1}}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_{0,1}}{\partial x_2}\right)^2\right]dx \tag{2.16}$$

и

$$\int_{\partial G_1}u_{0,2}\frac{\partial u_{0,2}}{\partial\nu}\,ds(x)+\int_{\partial G_R}u_{0,2}\frac{\partial u_{0,2}}{\partial\nu}\,ds(x)$$
$$=\int_{G_2}\left[\gamma^2u_{0,2}^2+\left(\frac{\partial u_{0,2}}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_{0,2}}{\partial x_2}\right)^2\right]dx. \tag{2.17}$$

Учитывая условия сопряжения и однородные граничные условия на Γ, с (2.16) и (2.17) имеем

$$\int_{\partial G_R}u_{0,2}\frac{\partial u_{0,2}}{\partial\nu}\,ds(x)=\sum_{i=1}^{2}\int_{G_i}\left[\gamma^2u_{0,i}^2+\left(\frac{\partial u_{0,i}}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_{0,i}}{\partial x_2}\right)^2\right]dx.$$

Отсюда, условия $|u_{0,2}(x)| = O(1)$ и $|\nabla u_{0,2}(x)| = O(|x|^{-2})$ при $|x| \to \infty$ обеспечивают, что $u_{0,1} \equiv 0$ в G_1 и $u_{0,2} \equiv 0$ в $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{G}_1$. В силу существования и единственности решения внутренней задачи Дирихле для уравнения $\Delta u_{0,1} - \gamma^2 u_{0,1} = 0$ получаем, что $u_{0,1} = 0$ и на границе ∂G_1. Таким образом функция

$$u_0 = \begin{cases} u_{0,1}, & \text{в } G_1, \\ u_{0,2}, & \text{в } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{G}_1, \end{cases}$$

равна нулю в $\mathbb{R}^2$. Утверждение теоремы следует по индукции. □

В работах [9, 12] для решений системы (2.9) найдено интегральное представление в форме потенциала простого слоя

$$U_n(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n} \int_\Gamma q_m(y) \Phi_{n-m}(x,y)\, ds(y), \qquad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \tag{2.18}$$

где $q_n(x)$ — неизвестные плотности, которые в нашем случае содержат корневую особенность

$$q_n(x) = \frac{\tilde{q}_n(x)}{\sqrt{|x - z_{-1}||x - z_1|}}, \qquad x \in \Gamma \setminus z_{-1} \cup z_1, \ \tilde{q}_n \in C(\Gamma), \tag{2.19}$$

$\Phi_n(x,y)$ — фундаментальные решения системы (2.9), которые имеют вид

$$\Phi_n(x,y) = K_0(\gamma|x-y|) v_n(|x-y|) + K_1(\gamma|x-y|) w_n(|x-y|), \qquad x \neq y. \tag{2.20}$$

Здесь $K_0(x)$ и $K_1(x)$ — функции Макдональда [3], $v_n(r)$ и $w_n(r)$ — полиномы, вычисляемые по формулам

$$v_n(r) = \sum_{k=0}^{[n/2]} a_{n,2k} r^{2k}, \qquad w_n(r) = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} a_{n,2k+1} r^{2k+1},$$

где коэффициенты $a_{n,k}$ определяются по известным рекуррентным соотношениям [13]. В дальнейшем при изучении свойств потенциалов (2.18) и соответствующих интегральных уравнений воспользуемся модифицированными пространствами Гельдера [6]. Функцию $\varphi\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ будем называть непрерывной по Гельдеру с показателем $0 < \alpha \le 1$ и корневой особенностью, если существует равномерно-непрерывная по Гельдеру функция $\psi \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$ такая, что

$$\varphi(x) = \frac{\psi(x)}{\sqrt{|x - z_{-1}||x - z_1|}}, \qquad x \in \Gamma \setminus \{z_{-1}, z_1\}.$$

Через $C^{*,0,\alpha}(\Gamma)$ обозначим пространство всех функций непрерывных по Гельдеру с корневой особенностью на Γ с показателем α и нормой

$$\|\varphi\|_{*,0,\alpha} = \|\psi\|_{0,\alpha}.$$

Можно показать, что пространство $C^{*,0,\alpha}(\Gamma)$ — банахово.

Теорема 2.3. *Потенциал простого слоя U_n является решением системы граничных задач (2.9)–(2.11), если его плотности $q_n \in C^{*,0,\alpha}(\Gamma)$ определяются из системы граничных интегральных уравнений*

$$-\frac{1}{\pi} \int_\Gamma q_n(y) \Phi_0(x,y)\, ds(y) = f_n(x) + \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \int_\Gamma q_m(y) \Phi_{n-m}(x,y)\, ds(y), \qquad x \in \Gamma \tag{2.21}$$

для $n = 0, 1, 2, \dots$.

Доказательство. Так как при $x \in D$ можно дифференцировать под знаком интеграла в (2.18), то после подстановки потенциала (2.18) в уравнения (2.9) имеем

$$\sum_{m=0}^{n} \int_\Gamma \left[q_m(y) \Delta \Phi_{n-m}(x,y) - \beta_{n-m} \sum_{k=0}^{m} q_k(y) \Phi_{m-k}(x,y) \right] ds(y)$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \int_\Gamma q_m(y) \left[\Delta\Phi_{n-m}(x,y) - \sum_{k=0}^{n-m} \beta_{n-m-k}\Phi_k(x,y) \right] ds(y).$$

Поскольку $\Phi_{n-m}(x,y)$ — фундаментальное решение уравнения с номером $n-m$ системы (2.9) и $x \neq y$ то полученное выражение тождественно равно нулю. Таким образом потенциал (2.18) удовлетворяет уравнениям системы (2.9). Для специальных функций $K_n(z)$ имеют место следующее асимптотическое разложение при больших значениях аргумента

$$K_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \exp(-z) \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$

Поэтому для потенциала (2.18) выполняется и условие на бесконечности (2.11). Наличие корневой особенности в плотностях q_n обеспечивает непрерывность потенциала U_n в $\mathbb{R}^2$. Из граничных условий (2.10) и теорем о скачках потенциалов уравнения Гельмгольца с чисто мнимым параметром [7] следует, что плотности потенциала (2.18) являются решениями интегральных уравнений (2.21). □

3. Численное решение

С учетом параметрического представления кривой Γ (2.1) и подстановки $s = \cos t$, $0 \le t \le \pi$, преобразим систему интегральных уравнений (2.21) к следующей параметрической форме

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi H_0(t,\tau)\psi_n(\tau)\, d\tau = g_n(t) - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \int_0^\pi H_{n-m}(t,\tau)\varphi_m(\tau)\, d\tau, \qquad 0 \le t \le \pi, \tag{3.1}$$

где

$$\varphi_n(t) = |\sin t||z'(\cos t)|q_n(z(\cos t)), \qquad \psi_n(t) = \sum_{m=0}^{n} \varphi_m(t), \qquad g_n(t) = f_n(z(\cos t))$$

и ядра заданы как

$$H_0(t,\tau) = -2\Phi_0(z(\cos t), z(\cos \tau)),$$

$$H_n(t,\tau) = -2[\Phi_n(z(\cos t), z(\cos\tau)) - \Phi_0(z(\cos t), z(\cos\tau))]$$

для $t \neq \tau$ и $n = 1, 2, \ldots$. После несложных преобразований система (3.1) может быть приведена к такому виду

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right) \left\{1 + H_0^1(t,\tau)\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right\} + \frac{1}{2}H_0^2(t,\tau)\right] \psi_n(\tau)\, d\tau = G_n(t) \tag{3.2}$$

для $0 \le t \le 2\pi$ с правой частью

$$G_n(t) = g_n(t) - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} \left[\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right) H_{n-m}^1(t,\tau) + \frac{1}{2}H_{n-m}^2(t,\tau)\right] \varphi_m(\tau)\, d\tau,$$

где

$$H_0^1(t,\tau) = \frac{I_0(\gamma|z(\cos t) - z(\cos\tau)|) - 1}{\sin^2\frac{t-\tau}{2}},$$

$$H_0^2(t,\tau) = H_0(t,\tau) - \ln(\frac{4}{e}[\cos t - \cos\tau]^2) \left\{1 + H_0^1(t,\tau)\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right\},$$

$$H_n^1(t,\tau) = I_0(\gamma|z(\cos t) - z(\cos\tau)|)\{v_n(|z(\cos t) - z(\cos\tau)|) - 1\}$$
$$- I_1(\gamma|z(\cos t) - z(\cos\tau)|)w_n(|z(\cos t) - z(\cos\tau)|),$$

$$H_n^2(t,\tau) = H_n(t,\tau) - \ln\left(\frac{4}{e}[\cos t - \cos\tau]^2\right) H_n^1(t,\tau)$$

для $n = 1, 2, \ldots$. Здесь $I_0(x)$ и $I_1(x)$ — модифицированные функции Бесселя [3]. Выписанные ядра имеют такие диагональные выражения

$$H_0^1(t,t) = \gamma^2 |z'(\cos t)|^2 \sin^2 t, \qquad H_0^2(t,t) = 2C + 2 + 2\ln\left(\frac{\gamma|z'(\cos t)|}{4}\right)$$

и

$$H_n^1(t,t) = 0, \qquad H_n^2(t,t) = -\frac{2a_{n1}}{\gamma}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

$C = 0.5772\ldots$ — константа Эйлера. Обозначим через $C_e^{0,\alpha}[0;2\pi]$ и $C_e^{1,\alpha}[0;2\pi]$, $0 < \alpha \leq 1$, подпространства четных 2π-периодических функций в пространствах функций непрерывных по Гельдеру и функций непрерывно дифференцируемых по Гельдеру соответственно.

Теорема 3.1. *Для каждой последовательности $f_n \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$ система интегральных уравнений (2.21) имеет единственное решение $q_n \in C^{*,0,\alpha}(\Gamma)$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим систему интегральных уравнений (3.2), которую перепишем в операторном виде

$$(S_0 + A_0 + B_0)\psi_n = g_n - \sum_{m=0}^{n-1} (A_{n-m} + B_{n-m})\varphi_m, \tag{3.3}$$

где

$$(S_0\varphi)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right)\varphi(\tau)\,d\tau,$$

$$(A_0\varphi)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right)\sin^2\frac{t-\tau}{2} H_0^1(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau,$$

$$(A_n\varphi)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right) H_n^1(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

$$(B_n\varphi)(t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} H_n^2(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau, \qquad n = 0, 1, \ldots .$$

Оператор S_0 соответствует логарифмическому потенциалу простого слоя для уравнения Лапласа в случае окружности радиуса $e^{-1/2}$. Следуя [19], оператор

$$S_0\colon C_e^{0,\alpha}[0;2\pi] \to C_e^{1,\alpha}[0;2\pi]$$

— ограничен и имеет ограниченный обратный. Поскольку вторая производная от $A_0\varphi$ имеет слабую особенность в ядре, а вторая производная от $B_0\varphi$ — непрерывное ядро то операторы $A_0, B_0\colon C[0;2\pi] \to C^2[0;2\pi]$ — ограничены. Из компактности вложения $C^{0,\alpha}[0;2\pi]$ в $C[0;2\pi]$ следует компактность операторов A_0 и B_0: $C_e^{0,\alpha}[0;2\pi] \to C_e^{1,\alpha}[0;2\pi]$. Очевидно также, что операторы A_n и $B_n\colon C_e^{0,\alpha}[0;2\pi] \to C_e^{1,\alpha}[0;2\pi]$ для $n = 1, 2, \ldots$ — ограничены.

Таким образом, систему операторных уравнений (3.3) можно представить в следующей эквивалентной форме

$$\psi_n + S_0^{-1}(A_0 + B_0)\psi_n = S_0^{-1} g_n - \sum_{m=0}^{n-1} S_0^{-1}(A_{n-m} + B_{n-m})\varphi_m. \tag{3.4}$$

Оператор $S_0^{-1}(A_0+B_0)\colon C_e^{0,\alpha}[0;2\pi] \to C_e^{1,\alpha}[0;2\pi]$ компактный как произведение ограниченного и компактного операторов и кроме того за теоремой 2.2 однородные уравнения (3.4) имеют только тривиальные решения. Отсюда, согласно теории Рисса [19], система уравнений (3.4) (и соответственно (3.2)) для $g_n \in C_e^{1,\alpha}[0;2\pi]$ имеет единственное решение $\varphi_n \in C_e^{0,\alpha}[0;2\pi]$.

Для окончательного доказательства теоремы необходимо теперь показать, что система интегральных уравнений (2.21) эквивалентна параметризированной системе (3.2). Очевидно достаточно доказать, что с (3.2) можно получить исходную систему (2.21). Определим функции q_n следующим образом

$$q_n(z(t)) = \varphi_n(\arccos t)\frac{1}{|z'(t)|\sqrt{1-t^2}}, \qquad t \in [-1;1]. \tag{3.5}$$

Поскольку $\varphi_n \in C_e^{0,\alpha}[0;2\pi]$ то согласно определению пространства $C^{*,0,\alpha}(\Gamma)$ имеем, что $q_n \in C^{*,0,\alpha}(\Gamma)$. Осуществляя далее сделанные до настоящей теоремы преобразования в обратном порядке, получим, что плотности q_n из (3.5) являются решениями системы интегральных уравнений (2.21). □

Численное решение системы (3.2) осуществим методом квадратур. С этой целью рассмотрим три квадратурных правила, построенных на основании тригонометрической интерполяции [9,12] с использованием равномерного разбиения $t_k = k\pi/N$, $k = 0, \dots, 2N-1$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right)d\tau \approx \sum_{k=0}^{2N-1} R_k(t)f(t_k),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\sin^2\frac{t-\tau}{2}\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right)d\tau \approx \sum_{k=0}^{2N-1} F_k(t)f(t_k),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\,d\tau \approx \frac{1}{2N}\sum_{k=0}^{2N-1} f(t_k),$$

где весовые коэффициенты определяются по формулам

$$R_k(t) = -\frac{1}{2N}\left\{1 + 2\sum_{m=1}^{N-1}\frac{1}{m}\cos m(t-t_k) + \frac{\cos N(t-t_k)}{N}\right\},$$

$$F_k(t) = \frac{1}{2N}\left\{-\frac{1}{4}\cos(t-t_k) + \sum_{m=2}^{N-1}\frac{1}{m(m^2-1)}\cos m(t-t_k) + \frac{\cos N(t-t_k}{N(N^2-1)}\right\}.$$

Применение этих квадратурных правил в (3.2) позволяет получить следующую систему аппроксимационных уравнений

$$\sum_{k=0}^{2N-1}\psi_{n,N}(t_k)\left\{R_k(t) + F_k(t)H_0^1(t,t_k) + \frac{1}{4N}H_0^2(t,t_k)\right\} = G_{n,N}(t), \tag{3.6}$$

где

$$G_{n,N}(t) = g_n(t) - \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{2N-1}\left\{R_k(t)H_{n-m}^1(t,t_k) + \frac{1}{4N}H_{n-m}^2(t,t_k)\right\}\varphi_{m,N}(t_k).$$

Введем операторы

$$(A_{0,N}\varphi)(t) = \sum_{k=0}^{2N-1} F_k(t)H_0^1(t,t_k)\varphi(t_k),$$

$$(A_{n,N}\varphi)(t) = \sum_{k=0}^{2N-1} R_k(t)H_n^1(t,t_k)\varphi(t_k), \qquad n = 1,2,\dots,$$

$$(B_{n,N}\varphi)(t) = \frac{1}{4N}\sum_{k=0}^{2N-1} H_n^2(t,t_k)\varphi(t_k), \qquad n = 0,1,\dots$$

и представим систему (3.6) в операторном виде

$$(S_0 + A_{0,N} + B_{0,N})\psi_{n,N} = g_n - \sum_{m=0}^{n-1}(A_{n-m,N} + B_{n-m,N})\varphi_{m,N}.$$

Последующая коллокация в узлах квадратурных формул приводит в (3.6) к последовательности систем линейных уравнений

$$\sum_{k=0}^{2N-1} \psi_{n,N}(t_k)\left\{R_{|j-k|} + F_{|j-k|}H_0^1(t_j,t_k) + \frac{1}{4N}H_0^2(t_j,t_k)\right\} = G_{n,N}(t_j), \quad (3.7)$$

$$j = 0,\dots,N,$$

где $R_k = R_k(0)$, $F_k = F_k(0)$ и аппроксимационные значения $G_{n,N}(t_j)$ для правой части имеют вид

$$G_{n,N}(t_j) = g_n(t_j) - \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{2N-1}\left\{R_{|j-k|}H_{n-m}^1(t_j,t_k) + \frac{1}{4N}H_{n-m}^2(t_j,t_k)\right\}\varphi_{m,N}(t_k)$$

(здесь $\varphi_{0,N}(t_k) = \psi_{0,N}(t_k)$ и $\varphi_{n,N}(t_k) = \psi_{n,N}(t_k) - \psi_{n-1,N}(t_k)$ для $n = 1,2,\dots$). При формировании последовательности систем (3.7), матрица которых имеет размерность $N+1 \times N+1$, учтено, что $\psi_{n,N}(t_k) = \psi_{n,N}(t_{2N-k})$ для $k = 0,\dots,N$. Системы (3.7) эквивалентны операторным уравнениям

$$P_N S_0\psi_{n,N} + P_N A_{n,N}\psi_{n,N} + P_N B_{n,N}\psi_{n,N} = P_N g_n - \sum_{m=0}^{n-1}(P_N A_{n-m,N} + P_N B_{n-m,N})\varphi_{m,N},$$

где P_N — оператор тригонометрического интерполирования.

Исследование сходимости и погрешности изложенного метода основывается на теории коллективно-компактных операторов [19]. С деталями такого анализа можно ознакомиться в [9, 12]. Без особых трудностей анализ из [9, 12] переносится на наш случай в виде следующего утверждения.

Теорема 3.2. *Пусть Γ — кривая из класса C^2 и $0 < \alpha < 1$. Тогда последовательности операторов $(P_N A_{n,N})$ и $(P_N B_{n,N})$ — коллективно-компактны с $C_e^{0,\alpha}[0;2\pi]$ в $C_e^{1,\alpha}[0;2\pi]$ для каждого $n = 0,1,\dots$ и поточечно сходятся к операторам A_n и B_n. При достаточно большом N аппроксимационные уравнения (3.7) имеют единственное решение $\varphi_{n,N}$ и справедлива оценка погрешности*

$$\|\varphi_{n,N} - \varphi_n\|_{0,\alpha} \le C_n \sum_{m=0}^{n}\left(\|P_N g_m - g_m\|_{1,\alpha} + \sum_{i=0}^{m}\|(P_N A_{i,N} + P_N B_{i,N} - A_i - B_i)\varphi_{n-i}\|_{1,\alpha}\right).$$

Заметим, что в случае аналитических граничной кривой и граничной функции мы имеем следующую оценку

$$\|\varphi_{n,N} - \varphi_n\|_{0,\alpha} \le C_n \exp\{-\sigma_n N\} \quad (3.8)$$

с постоянными C_n и σ_n не зависящими от φ_n.

Окончательно приближенные значения коэффициентов Фурье–Лагерра находим по формуле

$$\tilde{u}_{n,N}(x) = -\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{n}\{\Phi_{n-m}(x,z_1)\varphi_{m,N}(0) + 2\sum_{k=1}^{N-1}\Phi_{n-m}(x,x(\cos t_k))\varphi_{m,N}(t_k) + \Phi_{n-m}(x,z_{-1})\varphi_{m,N}(\pi)\}, \qquad x \in D,$$

Табл. 1. Численное решение в случае кривой (4.1) и функции (4.2)

		$x = (-1, 0)$			$x = (1.5, 0)$		
t	N	$M = 25$	$M = 30$	$M = 35$	$M = 25$	$M = 30$	$M = 35$
0.4	32	0.001887	0.003315	0.003510	0.065379	0.064603	0.063305
	64	0.001887	0.003315	0.003510	0.065379	0.064603	0.063302
0.8	32	0.007449	0.004949	0.004870	0.409544	0.410684	0.411208
	64	0.007449	0.004949	0.004870	0.409544	0.410685	0.411209
1.2	32	0.165221	0.168448	0.168514	0.592495	0.590966	0.590526
	64	0.165221	0.168448	0.168515	0.592495	0.590966	0.590526
1.6	32	0.344818	0.341888	0.341650	0.582501	0.584340	0.585978
	64	0.344818	0.341888	0.341649	0.582501	0.584340	0.585980
2.0	32	0.373211	0.371745	0.372286	0.484902	0.484396	0.480553
	64	0.373211	0.371745	0.372287	0.484902	0.484396	0.480550
2.4	32	0.326019	0.334525	0.333975	0.363619	0.360372	0.364426
	64	0.326019	0.334526	0.333974	0.363617	0.360371	0.364436

а приближенное решение исходной начально-краевой задачи (2.2)–(2.4) — как частичную сумму ряда Фурье–Лагерра обратного преобразования (2.5)

$$u_{M,N}(x,t) = \kappa \sum_{m=0}^{M} \tilde{u}_{m,N}(x) L_m(\kappa t).$$

4. Численные примеры

1. Граничная кривая является полуокружностью

$$\Gamma = \left\{ z(s) = \left(\cos \frac{\pi}{2} s, \sin \frac{\pi}{2} s \right) : -1 \le s \le 1 \right\}, \tag{4.1}$$

а граничная функция задана в виде

$$F(x,t) = t^2 \exp(-2t + 2). \tag{4.2}$$

В табл. 1 представлены результаты численного решения задачи (2.2)–(2.4) при $a = 2$, $b = 1$ и параметре преобразования $\kappa = 2$ в двух пространственных точках наблюдения. Мы иллюстрируем сходимость относительно количества точек интегрирования N метода квадратур и количества членов обратного преобразования Лагерра M.

Как видим, теоретически обоснованная экспоненциальная сходимость (3.8) метода квадратур подтверждается численным экспериментом.

2. Граничная кривая задана параметрически

$$\Gamma = \left\{ z(s) = \left(2 \sin \frac{3}{8} \pi \left(\frac{4}{3} + s \right), -\sin \frac{3}{4} \pi \left(\frac{4}{3} + s \right) \right) : -1 \le s \le 1 \right\}, \tag{4.3}$$

ТАБЛ. 2. Численное решение в случае кривой (4.3) и функции (4.4)

		$x=(0,0)$			$x=(1,0)$		
t	κ	$M=40$	$M=45$	$M=50$	$M=40$	$M=45$	$M=50$
0.4	1	-0.003611	-0.001985	-0.002287	-0.001048	-0.000385	-0.001892
	2	0.000291	0.000237	-0.000480	0.000019	0.000016	0.000042
0.8	1	0.004494	0.004524	0.006243	0.021574	0.022561	0.028291
	2	0.001910	0.002321	0.002916	0.032357	0.031346	0.031214
1.2	1	0.034132	0.036927	0.036187	0.287795	0.285285	0.281948
	2	0.041345	0.041033	0.041704	0.277867	0.278866	0.278942
1.6	1	0.214735	0.208116	0.205972	0.769659	0.773071	0.768277
	2	0.200906	0.201313	0.199984	0.764502	0.763130	0.763048
2.0	1	0.403609	0.407699	0.412127	0.875978	0.875977	0.878819
	2	0.412906	0.412028	0.413171	0.877105	0.879523	0.879766
2.4	1	0.412441	0.418889	0.417926	0.454025	0.449024	0.443692
	2	0.415506	0.417133	0.418002	0.432684	0.439229	0.438616

а граничная функция — импульс в виде B-сплайна

$$F(x,t)=\begin{cases} 0: & t\le 0,\\ \frac{16}{27}t^3: & 0\le t\le \frac{3}{4},\\ \frac{1}{4}+(t-\frac{3}{4})+\frac{4}{3}(t-\frac{3}{4})^2-\frac{16}{9}(t-\frac{3}{4})^3: & \frac{3}{4}\le t\le\frac{3}{2},\\ F(x,3-t): & t\ge\frac{3}{2}.\end{cases} \tag{4.4}$$

Табл. 2 содержит результаты численного решения начально-краевой задачи с значениями параметров $a=2$ и $b=1$ при различных значениях параметра преобразования Лагерра κ и одинаковом колличестве точек интегрирования $N=64$.

Литература

1. В. А. Галазюк, *Метод полиномов Чебышева–Лагерра в смешанной задаче для нелинейного уравнения II порядка*, Докл. АН УССР. Сер.А. **1** (1981), 3–7.
2. В. А. Галазюк, Р. С. Хапко, *Методы интегрального преобразования Чебышева–Лагерра и интегральных уравнений в начально-краевых задачах для телеграфного уравнения*, Докл. АН УССР. Сер.А. **8** (1990), 11–14.
3. Н. Н. Лебедев, *Специальные функции и их приложения*, "Физматгиз", Москва, 1963.
4. Й. В. Людкевич, *Метод інтегральних рівнянь у граничних задачах теорiо потенціалу*, Вісник АН УРСР **1** (1989), 8–16.
5. И. В. Людкевич, А. Е. Музычук, *Численное решение краевых задач для волнового уравнения*, ЛГУ, Львов, 1990.
6. Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения*, "Физматгиз", Москва, 1962.
7. Г. Н. Положий, *Уравнения математической физики*, "Высшая школа", Москва, 1964.
8. Р. С. Хапко, *Про три підходи розв'язування нестаціонарних задач на незамкнених поверхнях з допомогою методу інтегральних рівнянь*, Доп. АН Украони **12** (1991), 19–22.

9. Р. С. Хапко, *Метод квадратур для інтегральних рівнянь першого роду із логарифмічною особливістю в ядрі*, Доп. АН Украони **5** (1993), 36–40.
10. Р. С. Хапко, А. А. Переймибіда, *Чисельне розв'язування одного гранично-часового інтегрального рівняння типу телеграфного потенціалу*, Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **35** (1991), 87–90.
11. K. E. Atkinson, *A survey of boundary integral equation methods for the numerical solution of Laplace's equation in tree dimensions*, Numerical Solution of Integral Equations (M. A. Golberg, ed.), Plenum Press., New York–London, 1990, pp. 1–34.
12. R. Chapko and R. Kress, *On a quadrature method for a logarithmic integral equation of the first kind,*, World Scientific Series in Applicable Analysis. Contributions in Numerical Mathematics (Agarwal, ed.), vol. 2, World Scientific, Singapore, 1993, pp. 127–140.
13. R. Chapko and R. Kress, *On the numerical solution of initial boundary value problems by the Laguerre transformation and boundary integral equations*, Integral and Integrodifferential Equations: Theory, Methods and Applications. Series in Mathematical Analysis and Applications (Agarwal and O'Regan, eds.), vol. 2, Cordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 2000, pp. 55–69.
14. R. Chapko and R. Kress, *Rothe's method for the heat equation and boundary integral equations*, J. Integral Equations and Appl. **9** (1997), 47–69.
15. M. Costabel, *Boundary integral operators for the heat equation*, Integral Equations Oper. Theory **13** (1992), 498–552.
16. I. P. Gavrilyuk and V. L. Makarov, *The Cayley transform and the solution of an initial value problem for a first order differential equation with an unbounded operator coefficient in Hilbert space*, Numer. Funct. Anal. and Optimiz. **15** (1994), 583–598.
17. Y. Hayashi, *The Dirichlet problem for the two-dimensional Helmholtz equation for the open boundary*, J. Math. Anal. Appl. **44** (1973), 489–530.
18. G. Hsiao and J. Saranen, *Boundary integral solution of the two-dimensional heat equation*, Math. Meth. in the Appl. Sci. **16** (1993), 87–117.
19. R. Kress, *Linear Integral Equations*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1989.
20. R. Kress, *Inverse scattering form an open arc*, Math. Meth. in the Appl. Sci. **18** (1994), 267–293.
21. V. Makarov and R. Chapko, *The Cayley transform and boundary integral equations to an initial boundary value problem for the heat equation,*, Proc. IV Int. Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-99) (Lviv, Sept. 20–23, 1999), Lviv, 1999, pp. 59–64.
22. J. C. Nédélec, *New trends in the use and analysis of integral equations*, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, vol. 48, 1994, pp. 151–176.
23. I. H. Sloan, *Error analysis of boundary integral methods*, Acta numerica (1992), Cambridge Univ. Press, Cambridge, 283–339.
24. E. P. Stephan and W. L. Wendland, *A hypersingular boundary integral method for two-dimensional screen and crack problems*, Arch. Ration Mech. and Analyse **112** (1990), 363–390.
25. F. G. Tricomi, *Vorlesungen über Orthogonalreihen*, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1955.
26. Y. Yan and I. H. Sloan, *On integral equations of the first kind with logarithmic kernels*, J. Integral Equations and Appl. **1** (1988), 549–579.

Львовский национальный университет имени Ивана Франко

Поступила 6/04/1999