Журнал обчисл. прикл. матем.
Вип. 1, 2000, стор. 89–92

J. Comput. Appl. Math.
No. 85, 2000, pp. 89–92

О СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПРОЦЕССА С МИНИМАЛЬНОЙ НОРМОЙ К ЦЕЛОМУ ОПЕРАТОРУ

УДК 517.988

В. ХЛОБЫСТОВ

РЕЗЮМЕ. Показано, что в гильбертовом пространстве с мерой интерполяционный процесс минимальной нормы на выбранной последовательности узлов сходится к целому оператору при увеличении числа узлов и степени интерполянта.

Пусть X — сепарабельное гильбертово пространство с мерой μ, первый момент которой равен нулю, а второй ограничен [1], B — корреляционный оператор этой меры ядерный, $\operatorname{Ker} B = \varnothing$. Пусть Y — гильбертово пространство, Π_∞ — множество целых операторов $F\colon X \to Y$, оснащенное скалярным произведением

$$(F_1, F_2)_H = \sum_{k=0}^{\infty} \int_X \cdots \int_X \left(L_k^{(1)}(v_1, \ldots, v_k), L_k^{(2)}(v_1, \ldots, v_k) \right)_Y \mu(dv_1) \ldots \mu(dv_k) \quad (1)$$

и нормой $\|F\|_H = (F,F)_H^{1/2}$, где $F_1, F_2, F \in \Pi_\infty$, а $L_k^{(1)}, L_k^{(2)}$ — k-линейные непрерывные симметричные операторные формы, соответствующие операторам F_1 и F_2. Напомним, что оператор F называется целым, если он представим в виде

$$F(x) = L_0 + L_1 x + \cdots + L_n x^n + \ldots,$$

а числовой ряд $\|L_0\| + \|L_1\|\|x\| + \cdots + \|L_n\|\|x\|^n + \ldots$ сходится при всех $x \in X$.

Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ — система собственных ортонормальных векторов оператора B с собственными числами $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots$. Зафиксируем натуральные числа m и n и рассмотрим систему элементов $\{x_i\}_{i=0}^{N}$: $x_0 = 0$, $x_i = e_{i_1}/\lambda_{i_1} + \cdots + e_{i_k}/\lambda_{i_k}$, $i = 1, \ldots, N$, $1 \le k \le n$, $1 \le i_j \le m$. Здесь суммы состоят из одного, двух и т.д. до n слагаемых, каждое из которых является одним из элементов e_i/λ_i, $i = 1, \ldots, m$. Нетрудно видеть, что общее количество таких сумм, включая x_0, будет равно $N+1$, где $N = \sum_{k=1}^{n} C_{m+k-1}^{k}$. Тогда система элементов $\{Bx_i\}_{i=0}^{N}$ запишется следующим образом: $Bx_0 = 0$, $Bx_i = e_{i_1} + \cdots + e_{i_k}$, $i = 1, \ldots, N$, $1 \le k \le n$, $1 \le i_j \le m$. В [2]–[3] показано, что операторный полином n-й степени $P_{m,n}^*(F, x)\colon X \to Y$ вида

$$P_{m,n}^*(F,x) = \left\langle \vec{F}, V_{N+1}^{-1} \sum_{k=0}^{n} \{(x, x_i)^k\}_{i=0}^{N} \right\rangle,$$

где $\vec{F} = (F(Bx_0), F(Bx_1), \ldots, F(Bx_N))$, $V_{N+1} = \|\sum_{k=0}^{n} (Bx_i, x_j)^k\|_{i,j=0}^{N}$, $0^0 = 1$, $(\cdot\,,\cdot)$ — скалярное произведение в X, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum a_i b_i$, $a_i \in Y$, $b_i \in R^1$, $\vec{a} = (a_0, \ldots, a_N)$, $\vec{b} = (b_0, \ldots, b_N)$, имеет следующие свойства:

1.
$$P_{m,n}^*(F, Bx_i) = F(Bx_i), \qquad i = 0, \ldots, N, \quad (2)$$

т.е. $P_{m,n}^*$ является интерполяционным полиномом для оператора F на последовательности узлов $\{Bx_i\}$;

2. Среди всех операторных полиномов степени n, удовлетворяющих интерполяционным условиям (2), полином $P^*_{m,n}$ обладает минимальной нормой в метрике H;

3. Если P_n — операторный полином n-й степени, то

$$\|P_n - P^*_{m,n}(P_n)\|_H \to 0, \qquad m \to \infty.$$

В гильбертовом пространстве X с мерой μ исследуем точность интерполирования целого оператора F полиномом $P^*_{m,n}$ на последовательности узлов Bx_i, $i = 0, \dots, N$, а также сходимость интерполяционного процесса к F при увеличении числа узлов и степени интерполянта. Представим $F(x)$ в виде

$$F(x) = F_n(x) + R_n(x),$$

где $F_n(x) = L_0 + L_1 x + \dots + L_n x^n$, $R_n(x) = L_{n+1}x^{n+1} + L_{n+2}x^{n+2} + \dots$.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Имеет место оценка*

$$\begin{aligned}
&\|F - P^*_{m,n}(F)\|_H \\
&\quad \le \|F_n - P^*_{m,n}(F_n)\|_H \\
&\quad\quad + \Bigg\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} \|L_k\|^2 (\operatorname{Tr} B)^k \\
&\quad\quad\quad + \max_{1 \le i \le N} \|R_n(Bx_i)\|^2_Y \left[\prod_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)\right]^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k^2 (TrB)^k}{(1+\alpha_1)^2 \dots (1+\alpha_k)^2} \Bigg\}^{1/2},
\end{aligned} \tag{3}$$

где $\alpha_k = 2^k/k!$, $\operatorname{Tr} B = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty$.

Доказательство. Поскольку оператор $P^*_{m,n}(F, x)$ линейный по F, то

$$\begin{aligned}
\|F - P^*_{m,n}(F)\|_H &= \|F_n + R_n - P^*_{m,n}(F_n) - P^*_{m,n}(R_n)\|_H \\
&\le \|F_n - P^*_{m,n}(F_n)\|_H + \|R_n - P^*_{m,n}(R_n)\|_H.
\end{aligned} \tag{4}$$

Согласно (1) имеем

$$\|R_n - P^*_{m,n}(R_n)\|^2_H = \|R_n\|^2_H + \|P^*_{m,n}(R_n)\|^2_H,$$

$$\begin{aligned}
\|R_n\|^2_H &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_X \dots \int_X \|L_k(v_1, \dots, v_k)\|^2_Y \mu(dv_1) \dots \mu(dv_k) \\
&\le \sum_{k=n+1}^{\infty} \|L_k\|^2 \int_X \dots \int_X \|v_1\|^2 \dots \|v_k\|^2 \mu(dv_1) \dots \mu(dv_k) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \|L_k\|^2 (\operatorname{Tr} B)^k.
\end{aligned} \tag{5}$$

Как показано в [3], интерполяционный полином $P^*_{m,n}(F, x)$ на последовательности узлов Bx_i, $i = 0, \dots, N$, тождественно совпадает с интерполяционным полиномом

$$P^I_{m,n}(F, x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{m} \tilde{L}_k(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})(x, e_{i_1}) \dots (x, e_{i_k}),$$

построенном на той же последовательности узлов. Здесь $\tilde{L}_k(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ определяются единственным образом на основании интерполяционных условий

$$P^I_{m,n}(F, Bx_i) = F(Bx_i), \qquad i = 0, \dots, N,$$

с помощью рекуррентной процедуры [4]:

$$\begin{aligned}\tilde{L}_n(e_{i_1},\dots,e_{i_n}) = \frac{1}{n!}\Big\{&F(e_{i_1}+e_{i_2}+\dots+e_{i_n})\\ &-\big[F(e_{i_1}+e_{i_2}+\dots+e_{i_{n-1}})+\dots+F(e_{i_2}+e_{i_3}+\dots+e_{i_n})\big]\\ &+\big[F(e_{i_1}+e_{i_2}+\dots+e_{i_{n-2}})+\dots+F(e_{i_3}+e_{i_4}+\dots+e_{i_n})\big]\\ &+\dots+(-1)^{n-1}\big[F(e_{i_1})+F(e_{i_2})+\dots+F(e_{i_n})\big]+(-1)^nF(0)\Big\}.\end{aligned} \tag{6}$$

Далее, для определения $\tilde{L}_{n-1}(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{i_{n-1}})$ в формуле (6) заменим n на $n-1$ и F на $F-\tilde{L}_n$, для определения $\tilde{L}_{n-2}(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{i_{n-2}})$ — n на $n-2$ и F на $F-\tilde{L}_n-\tilde{L}_{n-1}$ и т.д.

Учитывая (1) и принимая во внимание равенство [1]

$$\int_X (x,u)(x,v)\,\mu(dx) = (Bu,v), \qquad u,v\in X,$$

а также то, что $\tilde{L}_0 = R_n(0) = 0$ (полином $P^I_{m,n}$ рассматриваем как интерполяционный для R_n), получаем

$$\|P^*_{m,n}(R_n)\|^2_H = \|P^I_{m,n}(R_n)\|^2_H = \sum_{k=1}^{n}\ \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{m} \|\tilde{L}_k(e_{i_1},\dots,e_{i_k})\|^2_Y \lambda_{i_1}\dots\lambda_{i_k}. \tag{7}$$

Используем рекуррентные соотношения (6) для определения $\tilde{L}_k(e_{i_1},\dots,e_{i_k})$, полагая в них $F\equiv R_n$, и приходим к следующим оценкам

$$\|\tilde{L}_k(e_{i_1},\dots,e_{i_k})\|_Y \le c_k \max_{1\le i\le N}\|R_n(Bx_i)\|_Y, \tag{8}$$

где

$$c_k = \alpha_k(1+\alpha_{k+1})\dots(1+\alpha_n) = (1+\alpha_1)\dots(1+\alpha_n)\frac{\alpha_k}{(1+\alpha_1)\dots(1+\alpha_k)},$$
$$\alpha_k = 2^k/k!, \qquad k=1,\dots,n.$$

С учетом оценок (8) из равенства (7) имеем

$$\begin{aligned}\|P^*_{m,n}(R_n)\|^2_H &\le \max_{1\le i\le N}\|R_n(Bx_i)\|^2_Y\sum_{k=1}^{n}c_k^2(\operatorname{Tr}B)^k\\ &= \max_{1\le i\le N}\|R_n(Bx_i)\|^2_Y\left[\prod_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)\right]^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k^2(\operatorname{Tr}B)^k}{(1+\alpha_1)^2\dots(1+\alpha_k)^2}.\end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом, на основании соотношений (4), (5), (9) получаем требуемое неравенство (3). Теорема полностью доказана. □

Теорема 2. *Пусть целый оператор F такой, что*

$$\lim_{n\to\infty}\ \overline{\lim_{m\to\infty}}\ \max_{1\le i\le N}\|R_n(Bx_i)\|_Y = 0, \ \ N=N(m). \tag{10}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\ \overline{\lim_{m\to\infty}}\ \|F-P^*_{m,n}(F)\|_H = 0, \tag{11}$$

т.е. интерполяционный процесс $P^*_{m,n}(F,x)$ сходится в метрике H к оператору $F(x)$ на последовательности узлов Bx_i, $i = 0,\dots,N$, при увеличении их числа и степени интерполянта.

Доказательство. На основании [3] интерполяционный процесс минимальной нормы на последовательности узлов Bx_i сходится в метрике H к интерполируемому полиномиальному оператору:

$$||F_n - P^*_{m,n}(F_n)||_H \to 0, \qquad m \to \infty \text{ для всех } n.$$

Далее, поскольку

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} ||L_k||^2 (TrB)^k \to 0, \qquad n \to \infty,$$

а при $n \to \infty$ произведение и ряд в (9) сходятся, то равенство (11) следует из оценки (3), если выполнено условие (10). Теорема доказана. □

В заключение укажем на одно достаточное условие сходимости интерполяционного процесса $P^*_{m,n}$ к целому оператору в смысле равенства (11). Пусть оператор F такой, что, начиная с некоторого номера n_0,

$$||L_{n+k}|| \le (q/n)^{n+k}, \qquad q \in (0,1),\ k = 1,2,\dots, \tag{12}$$

когда $n \ge n_0$. Нетрудно видеть, что

$$\max_{1\le i\le N} ||R_n(Bx_i)||_Y \le ||L_{n+1}||n^{n+1} + ||L_{n+2}||n^{n+2} + \dots$$

и условие (10) будет выполнено, если справедливо неравенство (12), а сходимость $P^*_{m,n}$ к F непосредственно следует из теоремы 2.

Литература

1. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов*, т. 1, “Наука”, Москва, 1971.
2. В. В. Хлобыстов, *Об экстремальных задачах на множестве интерполяционных операторных полиномов в гильбертовом пространстве*, Обчисл. та прикл. математика **2 (82)** (1997), 97–101.
3. В. Хлобыстов, Е. Кашпур, *О сходимости интерполяционного процесса с минимальной нормой в гильбертовом пространстве*, Журн. обчисл. та прикл. математики **1 (84)** (1999), 124–127.
4. В. В. Хлобыстов, Е. Ф. Кашпур, *К задаче интерполирования полиномиальных операторов*, Кибернетика и системный анализ **3** (1996), 102–108.

Київський університет ім. Тараса Шевченка

Поступила 25/11/1999